

Задача 1.1. Розглянемо круговий конус F в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x^1 = r u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r u^2 \sin u^1, \\ x^3 = h u^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{array}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Задача 1.2. Розглянемо круговий гіперболоїд F в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ x^3 = h u^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{array}$$

Перевірте регулярність поверхні F . Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P(\pi, -2)$.

** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F , дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Задача 1.3. Розглянемо катеноїд F в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ x^3 = u^1 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P(0, \frac{\pi}{3})$.

***Задача 2.** Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в \mathbb{R}^3 дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричній поверхні F , то її дотична площина $T_P F$ не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини цих поверхонь).

***Задача 3.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

Задача 4. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в \mathbb{R}^3 :

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(1, 0, 0)$.

*Запишіть рівняння дотичної площини поверхні F , що проходить через точку $A(0, 0, -1)$.

*Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні F , що проходить через точку $B(0, 0, 1)$.

***Задача 5.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в \mathbb{R}^3

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в \mathbb{R}^3 точку $A(a^1, a^2, a^3)$, що не лежить на поверхні F .

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1, p^2, p^3)$ на поверхні F є найближчою або найдалшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A , то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P .