Задача 0.2.1. Розглянемо поверхню F в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \qquad (u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$$

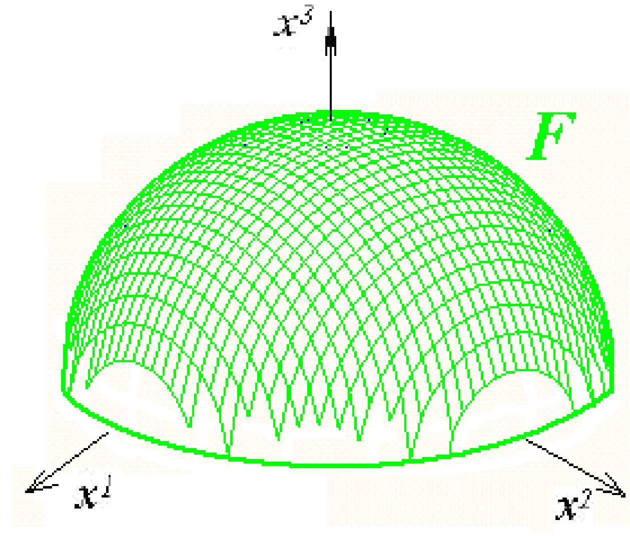
1) Якою є область задання D поверхні F?

2) Покажіть, що F є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

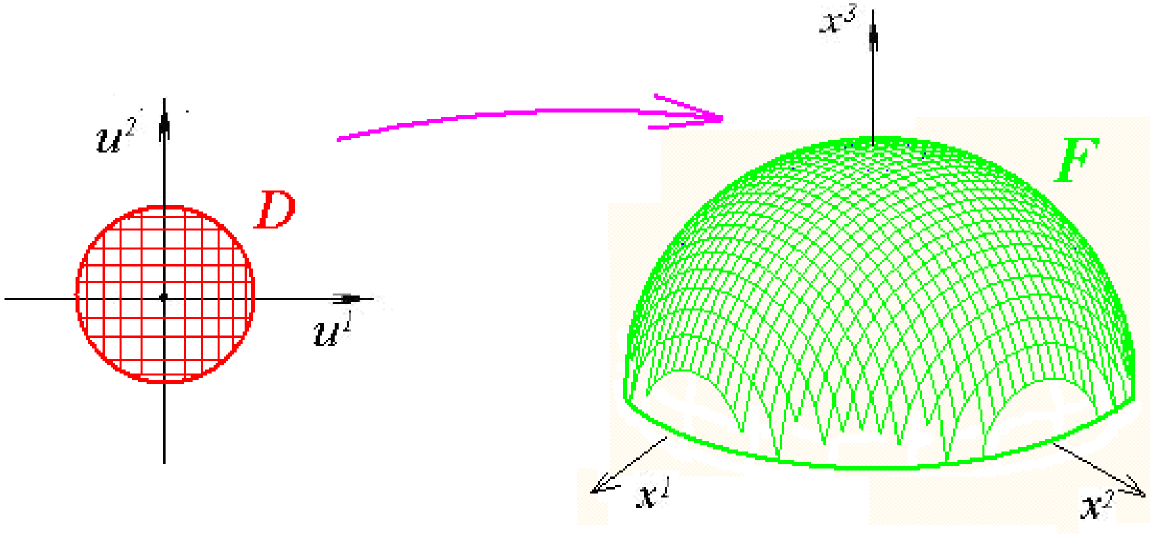
4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні F.

Розв'язання. Задана поверхня F представляє собою відкриту верхню півсферу



$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2,\ \ x^3>0.$$

Область задання D поверхні F – це відкритий круг $(u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$ в площині параметрів u^1, u^2.



Радіус-вектор поверхні F

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційованою вектор-функцією.

Обчислимо похідні вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$ і перевіримо виконання умови регулярності.

Маємо:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{-u^1}{\sqrt{R^2-(u^1)^2-(u^2)^2}}\end{pmatrix},\ \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}=\begin{pmatrix}0\\1\\\dfrac{-u^2}{\sqrt{R^2-(u^1)^2-(u^2)^2}}\end{pmatrix}$$

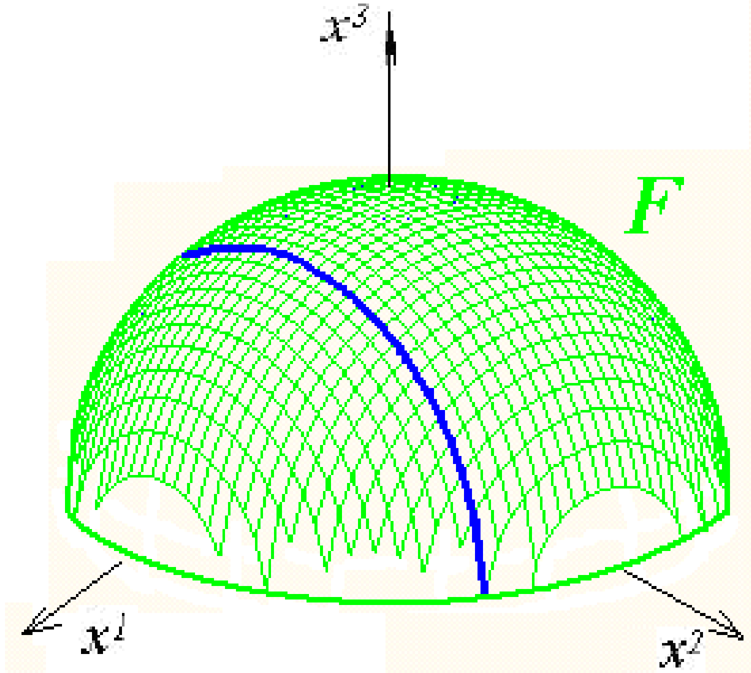
$$[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]=\begin{pmatrix}\dfrac{u^1}{\sqrt{R^2-(u^1)^2-(u^2)^2}}\\\dfrac{u^2}{\sqrt{R^2-(u^1)^2-(u^2)^2}}\\1\end{pmatrix}$$

Оскільки $[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]\neq\vec{0}$, робимо висновок, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Координатна лінія $\begin{cases} u^1 = c \\ u^2 = t \end{cases}$ на поверхні F задається в просторі $\mathbb{R}^3$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ t \\ \sqrt{R^2 - c^2 - t^2} \end{pmatrix}$$

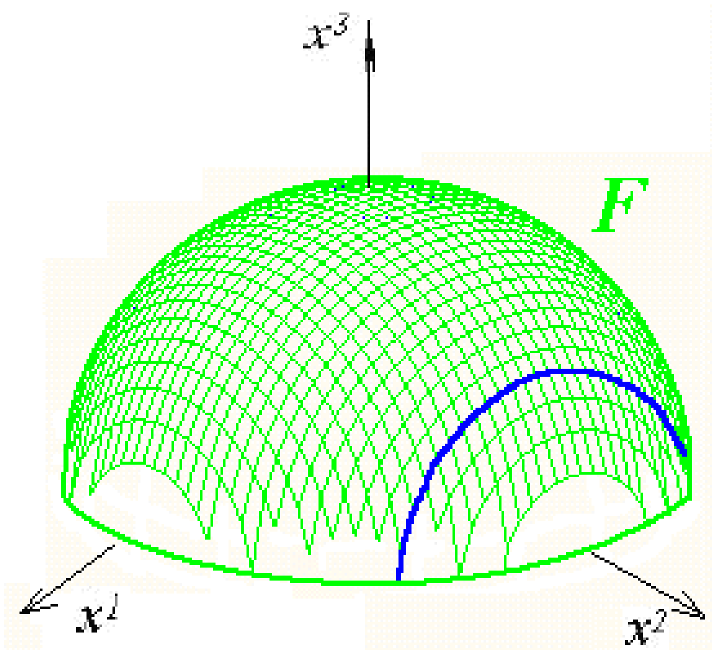
Вказана крива лежить в вертикальній площині Π: $x^1 = c$ і тому представляє собою вертикальне півколо – перетин півсфери F і площини Π.



Координатна лінія $\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = c \end{cases}$ на поверхні F задається, як крива в просторі $I\!R^3$, радіус-вектором

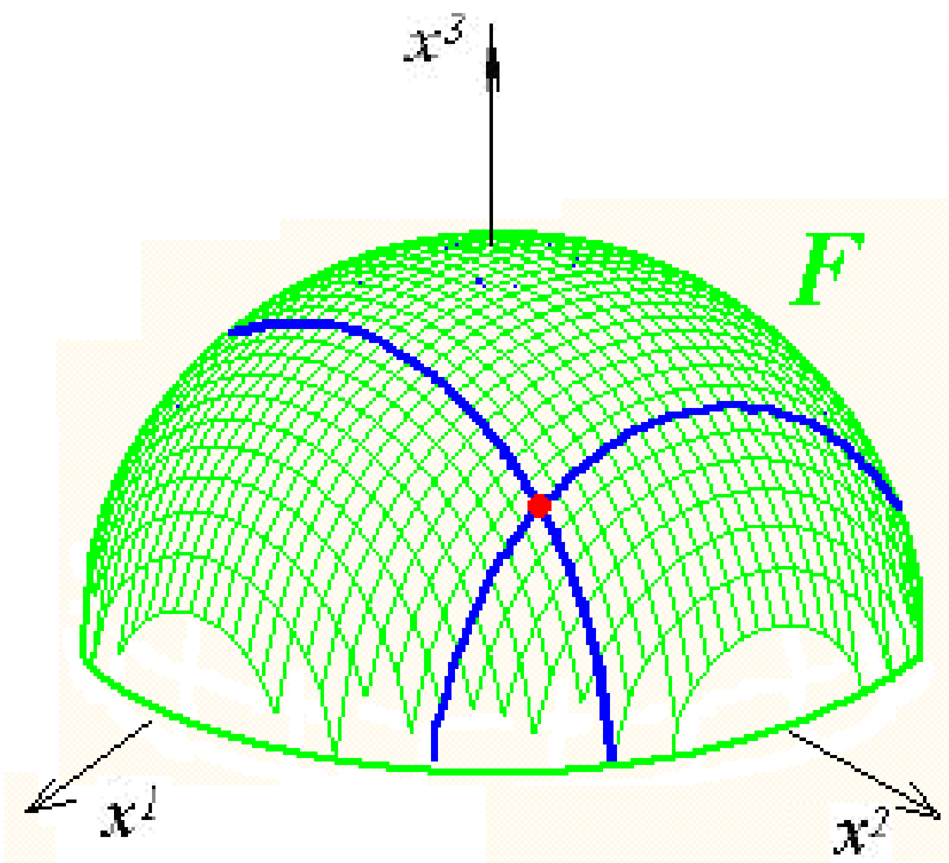
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ c \\ \sqrt{R^2 - t^2 - c^2} \end{pmatrix}$$

Вказана крива лежить в вертикальній площині Π: $x^2 = c$ і тому представляє собою вертикальне півколо – перетин півсфери F і площини Π.



Отже, маємо координатну сітку на півсфері F, утворену з двох сімейств вертикальних півкіл.

Через кожну точку регулярно параметризованої поверхні F проходить по одній координатній кривій з кожного з двох сімейств координатних ліній:



Задача 0.2.2. Розглянемо поверхню $\widetilde{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \qquad \begin{matrix} -\infty<\widetilde{u}^1<\infty \\ -\infty<\widetilde{u}^2<\infty \end{matrix}$$

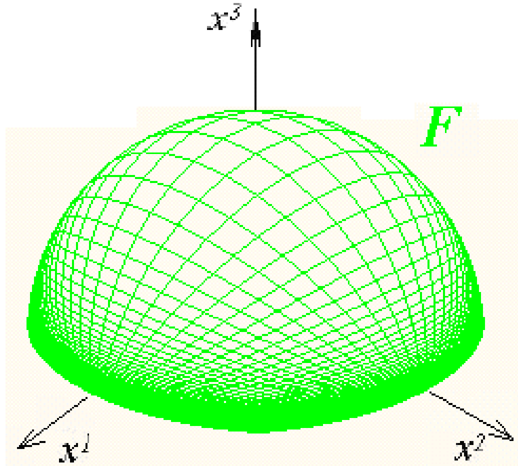
1) Якою є область задання $\widetilde{D}$ поверхні $\widetilde{F}$?

2) Покажіть, що $\widetilde{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що $\widetilde{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

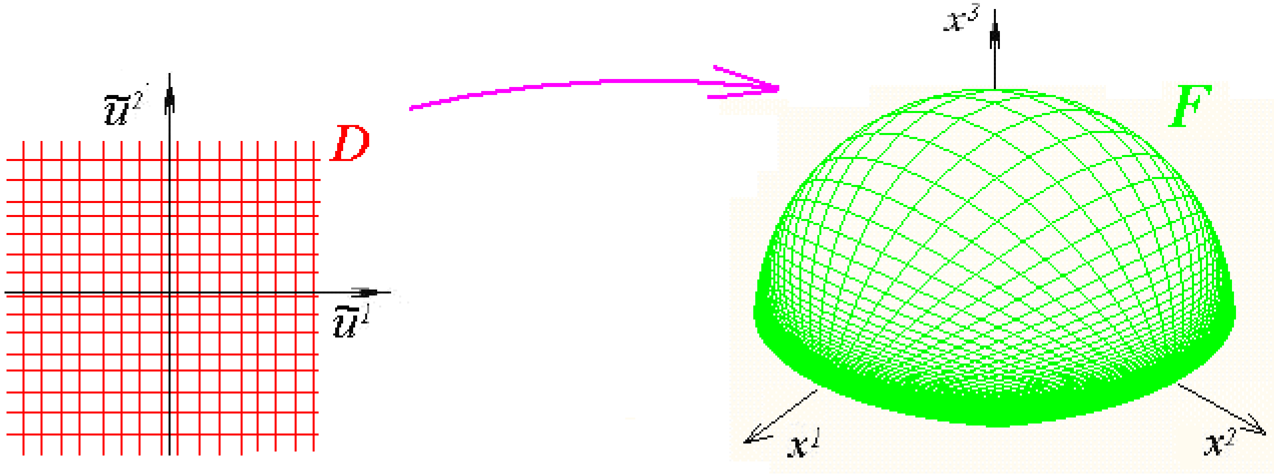
4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\widetilde{F}$?

Розв'язання. Задана поверхня F представляє собою відкриту верхню півсферу



$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2,\ x^3>0.$$

Область задання D поверхні F – це вся площина параметрів $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$



Радіус-вектор поверхні F

$$\vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \begin{pmatrix} R\dfrac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ R\dfrac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційованою вектор-функцією.

Обчислимо похідні вектор-функції $\vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і перевіримо виконання умови регулярності.

Маємо:

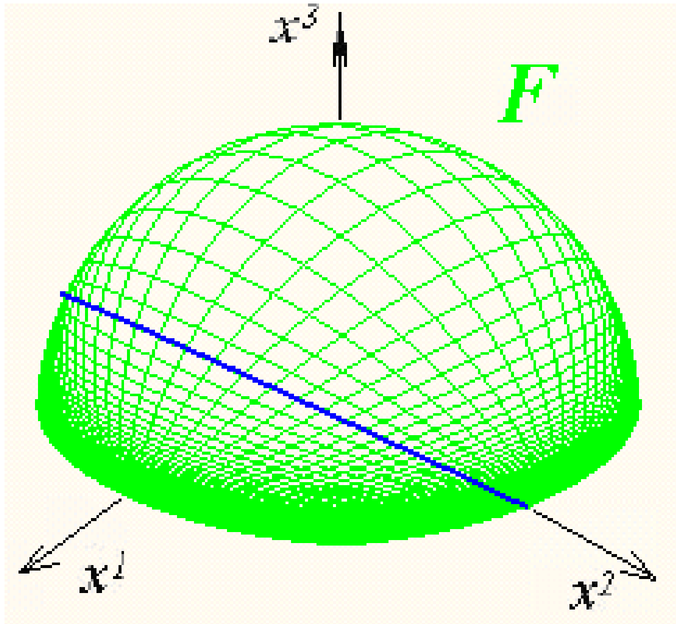
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} = \frac{R}{(\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} 1+(\tilde{u}^2)^2 \\ -\tilde{u}^1\tilde{u}^2 \\ -\tilde{u}^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} = \frac{R}{(\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} -\tilde{u}^1\tilde{u}^2 \\ 1+(\tilde{u}^1)^2 \\ -\tilde{u}^2 \end{pmatrix}$$

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2}] = \frac{R^2}{(1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2}] \neq \vec{0}$, робимо висновок, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Координатна лінія $\begin{cases} \tilde{u}^1 = c \\ \tilde{u}^2 = t \end{cases}$ на поверхні F задається в просторі $\mathbb{R}^3$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \\ R\dfrac{t}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2+t^2}} \end{pmatrix}$$

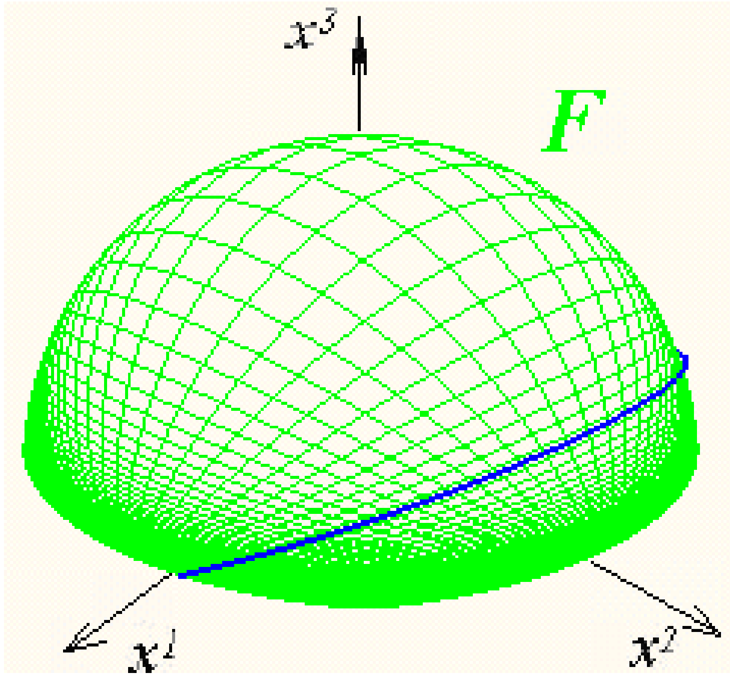


Вказана крива лежить в площині Π: $x^1 - c\,x^3 = 0$ і тому представляє собою півколо – перетин півсфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить координатну пряму x^2. Жмуток площин, що містять координатну пряму x^2, в перетині з півсферою породжують сімейство координатних ліній на півсфері F.

Координатна лінія $\begin{cases} \tilde{u}^1 = t \\ \tilde{u}^2 = c \end{cases}$ на поверхні F задається, як крива в просторі $I\!R^3$, радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \\ R\dfrac{c}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \\ R\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

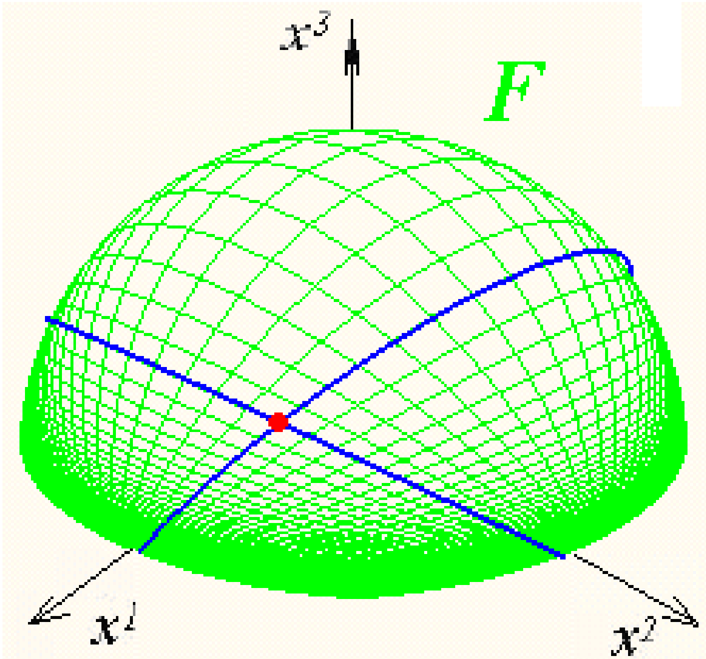


Вказана крива лежить в площині *П:* $x^2 - c\,x^3 = 0$ і тому представляє собою півколо – перетин півсфери F і площини *П*.

При будь-якому значенні c площина *П* містить координатну пряму x^1. Жмуток площин, що містять координатну пряму x^1, в перетині з півсферою породжують сімейство координатних ліній на півсфері F.

Отже, маємо координатну сітку на півсфері F, утворену з двох сімейств півкіл.

Через кожну точку регулярно параметризованої поверхні F проходить по одній координатній кривій з кожного з двох сімейств координатних ліній.



Зауваження. Якщо через точку півсфери F провести промінь з центра сфери – точки O, то цей промінь перетне горизонтальну площину $x^3=1$ в точці $(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2,1)$

***Задача 0.2.3.** Розглянемо поверхню $\hat{F}$ в $I\!R^3$, задану параметрично

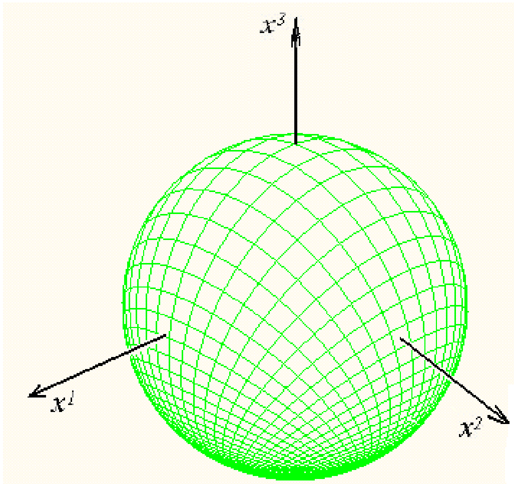
$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^1}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{4\hat{u}^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \end{cases}, \qquad \begin{matrix} -\infty<\hat{u}^1<\infty \\ -\infty<\hat{u}^2<\infty \end{matrix}$$

1) Якою є область задання $\hat{D}$ поверхні $\hat{F}$?

2) Покажіть, що $\hat{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $I\!R^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що $\hat{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\hat{F}$.

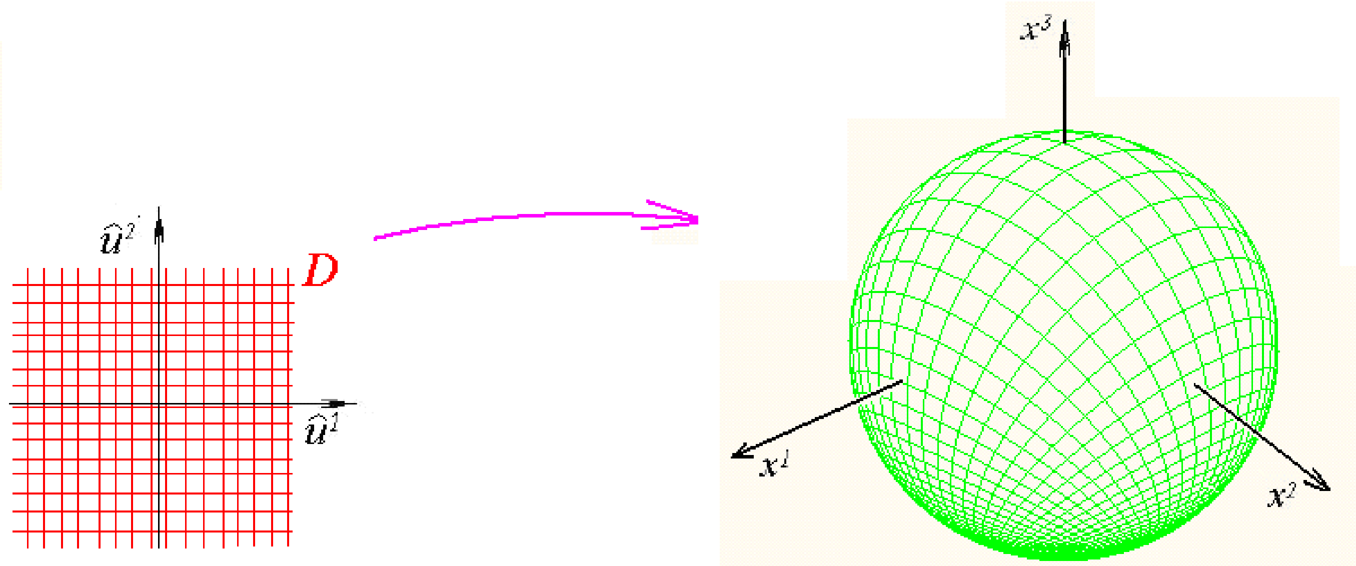


Розв'язання. Задана поверхня F представляє собою сферу

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=R^2$$

без південного полюса $(0,0,-R)$.

Область задання D поверхні F – це вся площина параметрів $\hat{u}^1, \hat{u}^2$



Радіус-вектор поверхні F

$$\vec{f}(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4\hat{u}^1}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ R \cdot \dfrac{4\hat{u}^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційованою вектор-функцією.

Обчислимо похідні вектор-функції $\vec{f}(\hat{u}^1,\hat{u}^2)$ і перевіримо виконання умови регулярності.

Маємо:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\hat{u}^1}=\frac{4R}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^2}\cdot\begin{pmatrix}4-(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2\\-2\hat{u}^1\hat{u}^2\\-4\hat{u}^1\end{pmatrix},$$

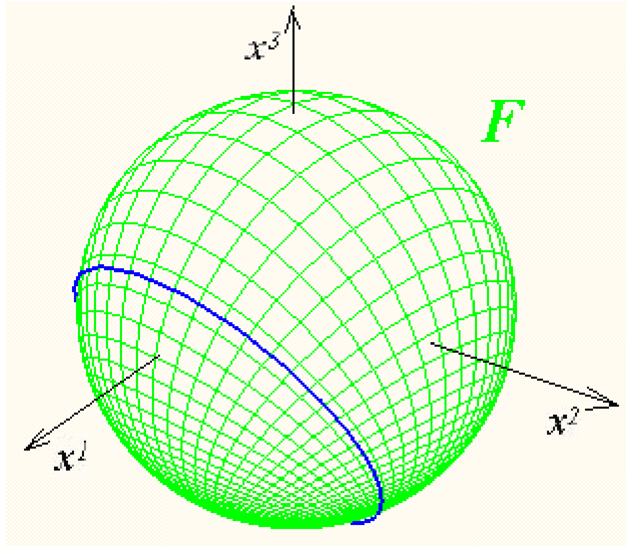
$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\hat{u}^2}=\frac{4R}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^2}\cdot\begin{pmatrix}-2\hat{u}^1\hat{u}^2\\4+(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2\\-4\hat{u}^2\end{pmatrix}$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]=\frac{16R^2}{(4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2)^3}\cdot\begin{pmatrix}4\hat{u}^1\\4\hat{u}^2\\4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2\end{pmatrix}$$

Оскільки $[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]\neq\vec{0}$, робимо висновок, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Координатна лінія $\begin{cases} \hat{u}^1 = c \\ \hat{u}^2 = t \end{cases}$ на поверхні F задається в просторі $I\!R^3$ радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4c}{4 + c^2 + t^2} \\ R \cdot \dfrac{4t}{4 + c^2 + t^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - c^2 - t^2}{4 + c^2 + t^2} \end{pmatrix}$$



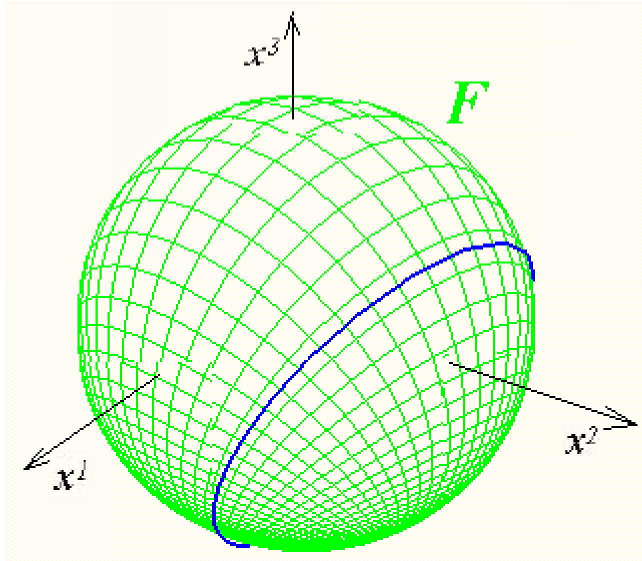
Вказана крива лежить в площині Π: $-2x^1 + c\,x^3 + cR = 0$.

Тому крива представляє собою коло (з виколотою точкою $(0,0,-R)$), що є перетином сфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить пряму $x^1=0$, $x^3 = -R$. Жмуток площин, що містять пряму $x^1=0$, $x^3 = -R$, в перетині зі сферою породжують сімейство координатних ліній на сфері F.

Координатна лінія $\begin{cases} \hat{u}^1 = t \\ \hat{u}^2 = c \end{cases}$ на поверхні F задається, як крива в просторі $\mathbb{R}^3$, радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cdot \dfrac{4t}{4 + t^2 + c^2} \\ R \cdot \dfrac{4c}{4 + t^2 + c^2} \\ R \cdot \dfrac{4 - t^2 - c^2}{4 + t^2 + c^2} \end{pmatrix}$$



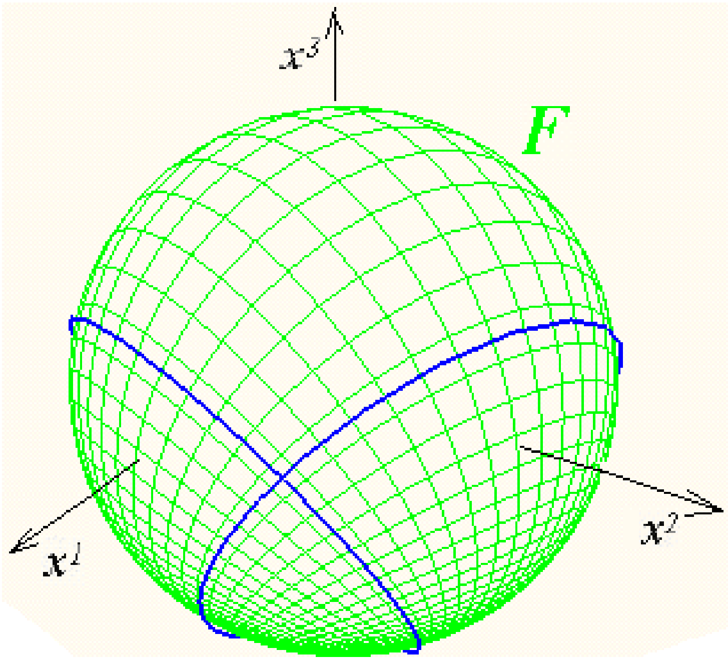
Вказана крива лежить в площині Π: $-2x^2 + c\,x^3 + cR = 0$.

Тому крива представляє собою коло (з виколотою точкою $(0,0,-R)$), що є перетином сфери F і площини Π.

При будь-якому значенні c площина Π містить пряму $x^2=0$, $x^3 = -R$. Жмуток площин, що містять пряму $x^2=0$, $x^3 = -R$, в перетині зі сферою породжують сімейство координатних ліній на сфері F.

Отже, маємо координатну сітку на сфері F, утворену з двох сімейств півкіл.

Через кожну точку регулярно параметризованої поверхні F проходить по одній координатній кривій з кожного з двох сімейств координатних ліній.



Зауваження. Якщо через точку сфери F провести промінь з південного полюса *(0,0,-R)*, то він перетне горизонтальну площину $x^3=1$ в точці $(\hat{u}^1,\hat{u}^2,1)$

Задача 0.2.4. Розглянемо поверхні F і $\widetilde{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей F і $\widetilde{F}$.

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат(u^1, u^2) і $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (u^1, u^2) до $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Розв'язання. Порівнюємо

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x^1 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}$$

Отримуємо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} u^1 = R \cdot \dfrac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \\ u^2 = R \cdot \dfrac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \end{cases}$$

Функції заміни є неперервно диференційованими.

Крім того, маємо

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cdot \dfrac{1 + (\tilde{u}^2)^2}{(\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2})^3} & R \cdot \dfrac{-\tilde{u}^1 \tilde{u}^2}{(\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2})^3} \\ R \cdot \dfrac{-\tilde{u}^1 \tilde{u}^2}{(\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2})^3} & R \cdot \dfrac{1 + (\tilde{u}^1)^2}{(\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2})^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R^2}{(1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2)^2} \neq 0$$

Значить, заміна координат є регулярною.

*__Задача 0.2.5.__ Розглянемо поверхні $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область Ω на сфері, що є перетином областей $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$.

В області Ω одночасно діють дві системи внутрішніх координат$(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області Ω на сфері?

Чи є перехід від $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Розв'язання.

Згадаємо, що $\widetilde{F}$ – це відкрита верхня півсфера, а $\hat{F}$ – сфера з виколотим південним полюсом. Таким чином, $\widetilde{F}$ належить $\hat{F}$.

На півсфері $\widetilde{F}$ діють відразу дві системи координат $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$. При цьому $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ змінюються на всій площині параметрів, а $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ обмежуються умовою $(\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2 - 4 < 0$.

Порівнюємо

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \dfrac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \dfrac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+(\tilde{u}^1)^2+(\tilde{u}^2)^2}} \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x^1 = R \cdot \dfrac{4\hat{u}^1}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R \cdot \dfrac{4\hat{u}^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \\ x^3 = R \cdot \dfrac{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2} \end{cases}$$

Отримуємо наступну заміну координат:

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 = \dfrac{4\hat{u}^1}{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2} \\ \tilde{u}^2 = \dfrac{4\hat{u}^2}{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2} \end{cases}$$

Функції заміни є неперервно диференційовними в крузі $(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2<4.$

Обчислюємо якобіан:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial \hat{u}^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial \hat{u}^2} \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial \hat{u}^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial \hat{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot \dfrac{4+(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{(4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2)^2} & 8 \cdot \dfrac{\hat{u}^1\hat{u}^2}{(4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2)^2} \\ 8 \cdot \dfrac{\hat{u}^1\hat{u}^2}{(4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2)^2} & 4 \cdot \dfrac{4+(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{(4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= -16 \cdot \frac{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2}{(\ 4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2\ )^3} \neq 0$$

Значить, заміна координат є регулярною.

Задача 0.3. Розглянемо регулярну криву γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \qquad a < s < b,$$

в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – головними нормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Аналогічно, запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – бінормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Розв'язання. Нехай s – натуральний параметр на кривій.

Лінійчата поверхня, утворена головними нормалями кривої γ, задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\,\vec{\nu}(s), \qquad a < s < b, \quad -\infty < t < \infty.$$

Якщо крива є гладкою класу C^m, $m \geq 3$, і не має точок перегину (де кривина $k=0$, то тоді поверхня задається гладкою класу C^{m-2} вектор-функцією.

Обчислюємо похідні:

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\ \vec{v}(s)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau} + t\ (-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}) = (1 - kt)\vec{\tau} + t\kappa\vec{\beta} \quad , \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$$

Обчислюємо векторний добуток:

$$[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [(1 - kt)\vec{\tau} + t\kappa\vec{\beta}, \vec{v}] = (1 - kt)[\vec{\tau}, \vec{v}] + t\kappa[\vec{\beta}, \vec{v}] = (1 - kt)\vec{\beta} - t\kappa\vec{\tau}$$

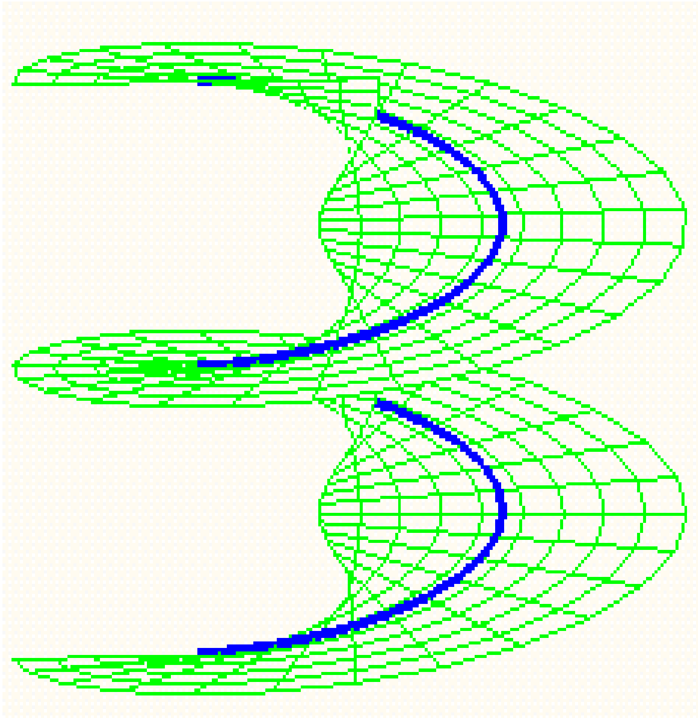
Умова регулярності $[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] \neq \vec{0}$ набуває наступного вигляду:

$$(1 - kt)^2 + (t\kappa)^2 \neq 0$$

Якщо скрут κ кривої γ не обертається в нуль в жодній точці на кривій, тоді лінійчата поверхня головних нормалей кривої γ буде регулярною поверхнею.

Якщо ж в якійсь точці $P(s_0)$ кривої γ скрут $\kappa(s_0)=0$, то тоді на твірній нашої лінійчатої поверхні, що проходить через точку P, при $t = \dfrac{1}{k(s_0)}$ виникне особлива точка поверхні.

Координатна сітка на поверхні утворюється двома сімействами ліній. Одно сімейство, координатні криві $s=const$, це прямолінійні твірні – головні нормалі кривої γ. Інше сімейство, координатні криві $t=const$, це «еквідістантні» криві кривої γ, кожна з яких отримана одночасним зсувом усіх точок кривої γ вздовж відповідних твірних на фіксовану відстань $t=const$.



Зауваження. Якщо γ – плоска крива, то лінійчата поверхня головних нормалей такої кривої – це частина площини. А особливі точки такої параметризованої поверхні (параметризації області площини) – це еволюта кривої γ.

Аналогічно, лінійчата поверхня, утворена бінормалями кривої γ, задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + t\ \vec{\beta}(s), \qquad a < s < b, \ -\infty < t < \infty.$$

Якщо крива є гладкою класу C^m, $m \geq 3$, і не має точок перегину (де кривина $k=0$, то тоді поверхня задається гладкою класу C^{m-2} вектор-функцією.

Обчислюємо похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau} + t\,(-\kappa\vec{\nu}) = \vec{\tau} - t\kappa\vec{\nu} \quad , \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\beta}$$

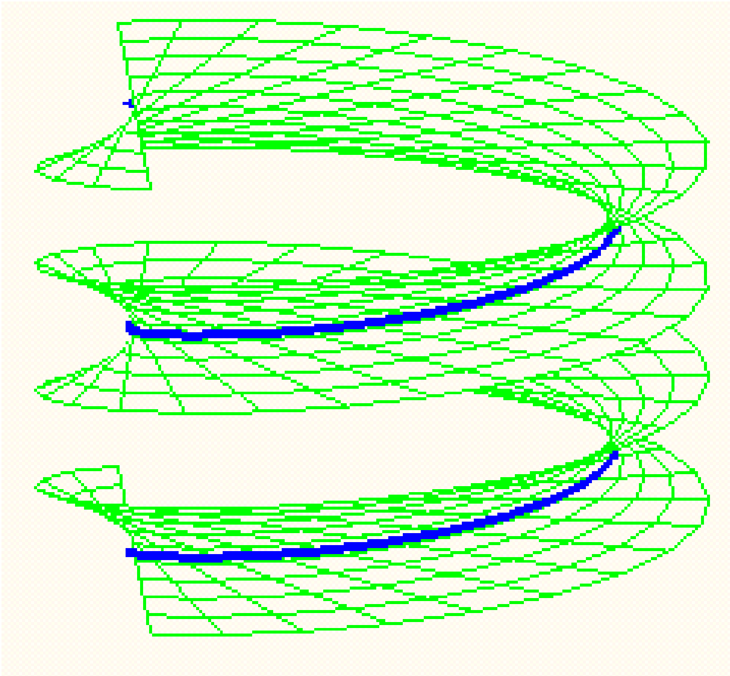
Обчислюємо векторний добуток:

$$[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau} - t\kappa\vec{\nu}, \vec{\beta}] = [\vec{\tau}, \vec{\beta}] - t\kappa[\vec{\nu}, \vec{\beta}] = -\vec{\nu} - t\kappa\vec{\tau}$$

Умова регулярності $[\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] \neq \vec{0}$ виконується автоматично.

Таким чином, лінійчата поверхня бінормалей кривої γ буде регулярною поверхнею.

Координатна сітка на поверхні утворюється двома сімействами ліній. Одно сімейство, координатні криві $s=const$, це прямолінійні твірні – бінормалі кривої γ. Інше сімейство, координатні криві $t=const$, це «еквідістантні» криві кривої γ, кожна з яких отримана одночасним зсувом усіх точок кривої γ вздовж відповідних твірних на фіксовану відстань $t=const$.



Зауваження. Якщо γ – плоска крива, то лінійчата поверхня бінормалей такої кривої – це циліндрична поверхня, оскільки всі бінормалі плоскої кривої перпендикулярні площині кривої γ.

Задача 1. Розглянемо круговий циліндр F в $\mathbb{R}^3$ заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \cdot \cos u^1 \\ x^2 = r \cdot \sin u^1, \\ x^3 = u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої циліндра F в точці P з внутрішніми координатами $(\frac{\pi}{4}, 3)$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор циліндра F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos u^1 \\ r \cdot \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Підставивши $u^1 = \frac{\pi}{4}$, $u^2 = 3$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Далі, обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin u^1 \\ r \cdot \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх значення в точці $P(\frac{\pi}{4}, 7)$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{4}, 7) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ r \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{4}, 7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Це вектори, які утворюють базис в дотичній площині $T_P F$. Знайдемо їх векторний добуток – це буде вектор нормалі дотичної площини:

$$\vec{N}_P = [\, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{4}, 7), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{4}, 7) \,] = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини T_PF, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 7 \\ \\ \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$1 \cdot (x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}) + 1 \cdot (x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}) + 0 \cdot (x^3 - 7) = 0,$$

тобто,

$$x^1 + x^2 - \sqrt{2}r = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ 7 \\ \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

$$\vec{N}_P = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$\frac{x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^3 - 7}{0} \ .$$

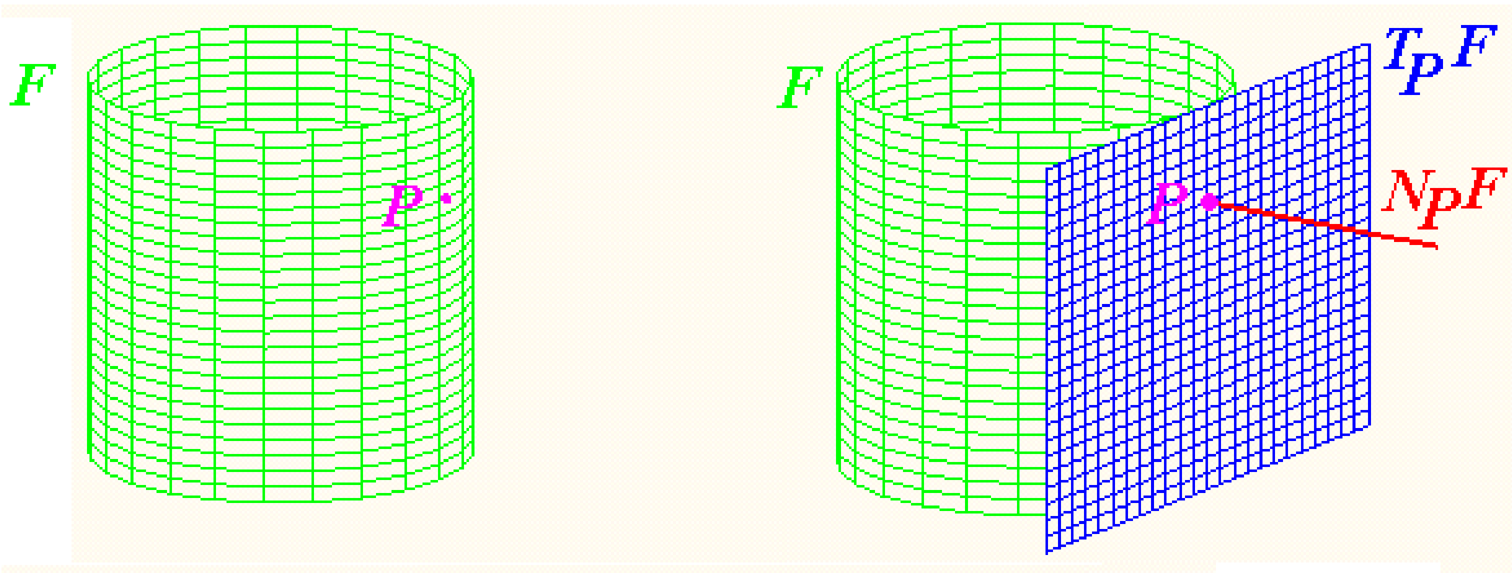
Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$x^1 + x^2 - \sqrt{2}r = 0.$$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^2 - \frac{r}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{x^3 - 7}{0}.$$



Задача 2. Розглянемо явно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$x^3 = x^1(x^1 - \sqrt{3}\,x^2)(x^1 + \sqrt{3}\,x^2),\ -\infty < x^1, x^2 < \infty.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці P з $(x^1, x^2) = (0,0)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що для явно заданої поверхні $x^3 = z(x^1, x^2)$ дотична площина в точці $P(x_0^1, x_0^2)$ задається рівнянням

$$x^3 \quad = \ z(x_0^1, x_0^2) + (x^1 - x_0^1)\cdot\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) + (x^2 - x_0^2)\cdot\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2),$$

а нормальна пряма – рівнянням

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^3 - z(x_0^1, x_0^2)}{1}$$

Підставимо $z(x^1, x^2) = x^1(x^1 - \sqrt{3}\,x^2)(x^1 + \sqrt{3}\,x^2)$ і $(x_0^1, x_0^2) = (0,0)$.

Отримаємо рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$x^3 = 0 + (x^1 - 0)\cdot 0 + (x^2 - 0)\cdot 0,$$

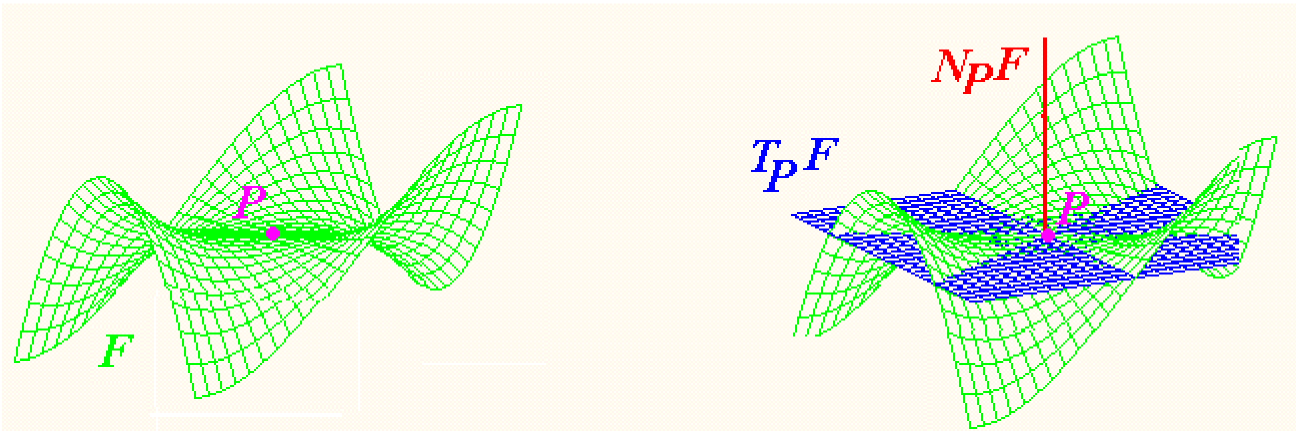
тобто, $x^3=0$.

Отримаємо рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - 0}{0} = \frac{x^3 - 0}{1},$$

тобто, $x^1=0$, $x^2=0$.

Відповідь: Рівняння дотичної площини $T_P F$: $x^3=0$.
Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $x^1=0$, $x^2=0$.



Задача 3. Розглянемо неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$((x^1-1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)\cdot((x^1+1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)-1=0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(\sqrt{2},0,0)$.

*Знайдіть точку $Q(q^1,q^2,q^3)$ на поверхні F таку, що дотична площина T_QF є паралельною площині $x^3=0$.

*Знайдіть точку $A(a^1,a^2,a^3)$ на поверхні F таку, що нормальна пряма N_QF проходить через точку $C(3,1,0)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що для неявно заданої поверхні $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$ дотична площина в довільній точці (x_0^1, x_0^2, x_0^3) задається рівнянням

$$(x^1-x_0^1)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)+(x^2-x_0^2)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)+(x^3-x_0^3)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)=0,$$

а нормальна пряма – рівнянням

$$\frac{x^1-x_0^1}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}=\frac{x^2-x_0^2}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}=\frac{x^3-x_0^3}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1,x_0^2,x_0^3)}$$

Підставимо $\Phi = ((x^1-1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)\cdot((x^1-1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)-1=0.$

Маємо:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 4x^1\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1\,)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 4x^2\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1\,)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 4x^3\cdot(\,(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1\,)$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці поверхні:

$$(x^1-x_0^1)\cdot x_0^1\cdot\frac{(x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2-1}{(x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1}+(x^2-x_0^2)\cdot x_0^2+(x^3-x_0^3)\cdot x_0^3=0$$

Рівняння нормальної прямої в довільній точці поверхні F:

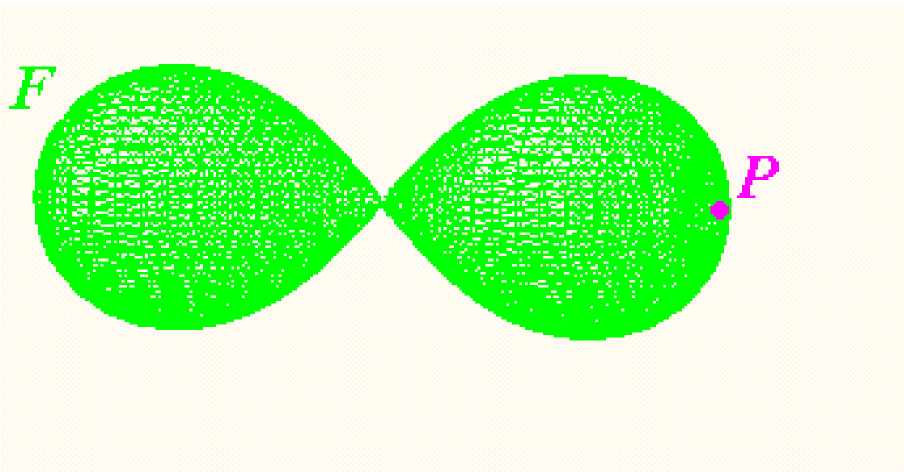
$$\frac{x^1-x_0^1}{x_0^1\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2-1)}=\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1)}=\frac{x^3-x_0^3}{x_0^2\cdot((x_0^1)^2+(x_0^2)^2+(x_0^3)^2+1)}$$

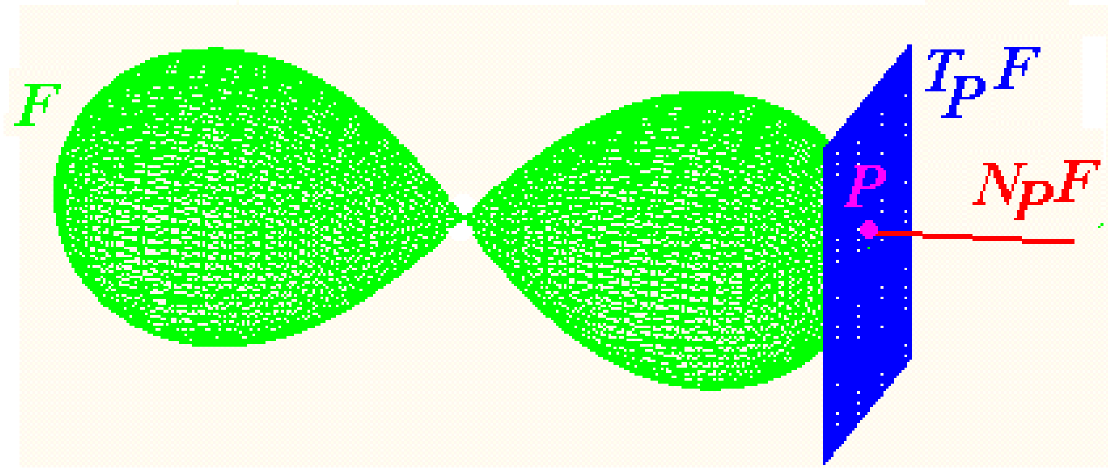
В точці $P(\sqrt{2},0,0)$ отримуємо рівняння дотичної площини $T_P F$

$$x^1 - \sqrt{2} = 0$$

і рівняння нормальної прямої $N_P F$

$$\frac{x^1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x^2 - 0}{0} = \frac{x^3 - 0}{0}$$





Для знаходження точки $Q(q^1,q^2,q^3)$ на поверхні F такої, що дотична площина T_QF є паралельною площині $x^3=0$, маємо систему

$$\begin{cases} ((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)\cdot((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)-1=0 \\ \dfrac{q^1((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2-1)}{0}=\dfrac{q^2((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)}{0}=\dfrac{q^3((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)}{1} \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{cases} ((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)\cdot((q^1-1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2)-1=0 \\ q^1\cdot((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2-1)=0 \\ q^2\cdot((q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+1)=0 \end{cases}$$

Ця система має чотири розв'язки $Q(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},0,\pm\frac{1}{2})$

Для знаходження точку $A(a^1,a^2,a^3)$ на поверхні F такої, що нормальна пряма N_QF проходить через точку $C(3,1,0)$, маємо наступну систему:

$$((a^1-1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2)\cdot((a^1+1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2)-1=0$$

$$\frac{3-a^1}{a^1\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2-1)}=\frac{1-a^2}{a^2\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+1)}=\frac{0-a^3}{a^3\cdot((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+1)}$$

Ця система має два розв'язки $A(-1.3\ldots, -0.2\ldots, 0)$ і $A(1.3\ldots, 0.2\ldots, 0)$.

Відповідь: Рівняння дотичної площини T_PF: $x^1-\sqrt{2}=0$.

Рівняння нормальної прямої N_PF: $x^2=0$, $x^3=0$.

Задача 1.1. Розглянемо круговий конус F в $\mathbb{R}^3$, заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r\,u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r\,u^2 \sin u^1, \\ x^3 = h\,u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$.

Задача 1.2. Розглянемо круговий гіперболоїд F в $\mathbb{R}^3$, заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ \qquad x^3 = h\, u^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{array}$$

Перевірте регулярність поверхні F. Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\ (\pi, -2)$.

** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F, дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Задача 1.3. Розглянемо катеноїд F в $\mathbb{R}^3$, заданий параметрично

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ \quad x^3 = u^1 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P\ (0, \frac{\pi}{3})$.

* **Задача 2**. Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричні поверхні F, то її дотична площина T_PF не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини цих поверхонь).

***Задача 3.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

***Задача 4.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1,a^2,a^3)$, що не лежить на поверхні F.

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1,p^2,p^3)$ на поверхні F єнайближчою або найдальшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A, то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P.

Задача 0.1. Розглянемо просту поверхню M^2 в $\mathbb{R}^3$. За визначенням, для кожної точки P на поверхні M^2 існує окіл U, який є топологічно еквівалентним (гомеоморфним) відкритому диску D в $\mathbb{R}^2$.

Окіл U разом з гомеоморфізмом $\varphi\colon D\to U$ утворюють *карту* на поверхні M^2 . Набір карт $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$, який покриває усю поверхню M^2, тобто $\bigcup\limits_{j\in J} U_j \supset M$, утворює *атлас* поверхні M^2.

Яку найменшу кількість карт повинен мати атлас, якщо:

1) M^2 – це сфера

2) M^2 – це сфера з однією ручкою, тобто, M^2 – тор

**3)* M^2 – це сфера з двома ручками, тобто, M^2 – крендель

4) M^2 – це сфера з однією виколотою точкою

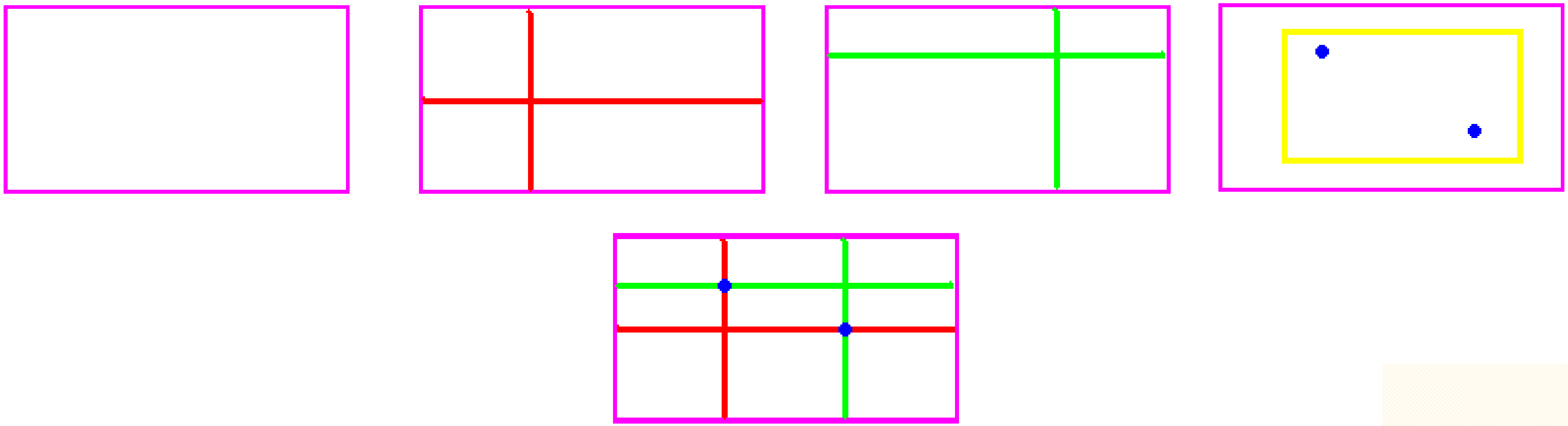
5) M^2 – це сфера з двома виколотими точками

******6)* M^2 – це сфера з m ручками та n виколотими точками ?

Зауваження. Інтуітивно, щоб отримати карту, потрібно взяти диск (круг) на площині і про деформувати його – дозволяється розтягувати, стискувати, викривляти, вигинати, закручувати і т.д., але не можна нічого розривати і не можна нічого склеювати…

Побудова простої поверхні схожа на побудову моделі з пап'є-маше: вирізаємо клаптики (топологічно еквівалентні диску/кругу/квадрату) і поступово наклеюємо їх один на інший так, щоб разом вони утворили якусь складну поверхню.

Top



Задача 3.2. Знайдемо дотичну площину та нормаль поверхні, параметризація якої має вигляд

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv,$$

у точці M, що відповідає значенням параметрів $u = 2$, $v = 1$ (тобто $M(3, 1, 2)$). Отже, поверхня задана вектор-функцією

$$r(u, v) = (u + v,\ u - v,\ uv).$$

Відомо, що базис дотичної площини у довільній точці регулярної поверхні утворюють вектори

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (1,\ 1,\ v)$$

і

$$r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (1,\ -1,\ u).$$

У точці M це

$$r_u = (1, 1, 1), \quad r_v = (1, -1, 2).$$

Тепер знайдемо вектор нормалі поверхні у M за допомогою векторного добутку r_u і r_v:

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -2).$$

З того, що $[r_u, r_v] \neq 0$, випливає, що r_u і r_v неколінеарні, тобто дійсно утворюють базис деякої площини. Ця властивість якраз і зветься за означенням регулярністю поверхні у M. Також можна знайти одиничний нормальний вектор

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)$$

(це, звичайно, можна зробити лише у регулярній точці). За побудовою, нормальний вектор поверхні є нормальним до її дотичної площини у відповідній точці, тому рівняння цієї площини має вигляд

$$[r_u, r_v]^1(x - x_0) + [r_u, r_v]^2(y - y_0) + [r_u, r_v]^3(z - z_0) = 0$$

або

$$n^1(x - x_0) + n^2(y - y_0) + n^3(z - z_0) = 0$$

або просто

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки M. В нашому випадку це буде

$$3(x-3) + (-1)(y-1) + (-2)(z-2) = 0,$$

$$3x - y - 2z - 4 = 0.$$

У свою чергу, нормаль (нормальна пряма) до поверхні у M проходить через цю точку у напрямку вектора нормалі, тому її рівняння мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{[r_u, r_v]^1} = \frac{y - y_0}{[r_u, r_v]^2} = \frac{z - z_0}{[r_u, r_v]^3}$$

або

$$\frac{x - x_0}{n^1} = \frac{y - y_0}{n^2} = \frac{z - z_0}{n^3}.$$

Отже, у нас це

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Розглянемо тепер іншу параметризацію цієї поверхні. Зауважимо, що точка (x, y, z) їй належить тоді й тільки тоді, коли

$$z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$$

(перевірте це), тобто це явно задана поверхня (гіперболічний параболоїд). Згадаємо, що для явно заданої поверхні $z = f(x, y)$ ми використовуємо параметризацію

$$r(x, y) = (x,\ y,\ f(x, y)).$$

Для неї базис дотичних просторів складають вектори

$$r_x = (1,\ 0,\ f_x)$$

і

$$r_y = (0,\ 1,\ f_y).$$

Зауважимо, що вони завжди неколінеарні, тобто будь-яка явно задана поверхня є регулярною. Знайдемо нормальний вектор у загальному вигляді:

$$[r_x, r_y] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1),$$

$$n = \frac{[r_x, r_y]}{|[r_x, r_y]|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x,\ -f_y,\ 1).$$

У нас $f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$, отже

$$[r_x, r_y] = \left(-\frac{x}{2},\, \frac{y}{2},\, 1\right).$$

Остільки $x = 3$, $y = 1$ в точці M, у ній

$$[r_x, r_y] = \left(-\frac{3}{2},\, \frac{1}{2},\, 1\right).$$

Цей вектор колінеарний вектору $(3, -1, -2)$, що ми отримали раніше, тому дійсно маємо ті ж дотичну площину та нормаль. І взагалі, дотична площина і нормаль у точці поверхні не залежать від вибору регулярної параметризації в околі цієї точки.

Задача 3.4. Розглянемо прямий гелікоїд

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a\,v,$$

де константа $a > 0$. Його параметризація

$$r(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ a\,v).$$

визначена на $\mathbb{R}^2$. Діємо як у попередній задачі (тільки у загальній точці поверхні замість конкретної):

$$r_u = (\cos v,\ \sin v,\ 0),$$

$$r_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ a),$$

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = (a\sin v,\ -a\cos v,\ u),$$

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{(a\sin v)^2 + (-a\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + u^2}.$$

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}(a\sin v,\ -a\cos v,\ u).$$

Зауважимо, що $a^2 + u^2 > 0$ для будь-якого u, тому ця поверхня регулярна. Отже, дотичні площини мають рівняння

$$a\sin v(x - a\cos v) - a\cos v(y - a\sin v) + u(z - a\,v) = 0,$$

$$a\sin v\,x - a\cos v\,y + u\,z - a\,uv = 0,$$

а нормалі – рівняння

$$\frac{x - a\cos v}{a\sin v} = \frac{y - a\sin v}{-a\cos v} = \frac{z - a\,v}{u}.$$

Нагадаємо, що координатні лінії поверхні, що параметризована вектор-функцією r – це криві, уздовж яких зберігається одна з локальних координат. Тобто координатна лінія

$u = u_0$ – це крива $v \mapsto r(u_0, v)$, а $v = v_0$ – крива $u \mapsto r(u, v_0)$. Зокрема, r_v і r_u є дотичними векторами до цих координатних ліній відповідно. Для нашої поверхні у першому з цих випадків, коли координата $u = u_0$ постійна, а v змінюється, відповідна лінія буде гвинтовою, а нормаль з напрямним вектором $(a\sin v,\ -a\cos v,\ u_0)$ обертатиметься навколо осі Oz. Уздовж координатної лінії $v = v_0$, що є прямою, паралельною площині Oxy, (прямолінійної твірної гелікоїда) нормаль буде обертатися у нормальній площині цієї твірної, зберігаючи свою ортогональну проекцію на Oxy з напрямним вектором $(\sin v_0,\ -\cos v_0,\ 0)$.

Задача 3.5. Нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функція двох змінних, $a, b \in \mathbb{R}$. У цій задачі треба переконатися у тому, що усі дотичні площини до поверхні

$$f(x - az, y - bz) = 0$$

паралельні деякому фіксованому напрямку. Як бачимо, поверхня тут є неявно заданою, тобто її рівняння має вигляд

$$F(x, y, z) = 0,$$

де $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – гладка функція (в нашому випадку гладкість F, очевидно, еквівалентна гладкості f). Як відомо, за умови регулярності F (тобто $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ у всіх точках, у яких $F = 0$) неявно задана поверхня є регулярною, і в кожній її точці (x_0, y_0, z_0) градієнт

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)) \neq 0$$

є нормальним вектором, тобто дотична площина поверхні в цій точці має рівняння

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0,$$

а нормаль –

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

(аналогічно до неявно заданої кривої у площині).

У нашому випадку

$$F(x, y, z) = f(x - az, y - bz),$$

тому

$$F_x = f_u,\ F_y = f_v,\ F_z = -a\, f_u - b\, f_v,$$

де через u і v позначаємо аргументи f. Зокрема, для регулярності цієї поверхні достатньо виконання умови $(f_u, f_v) \neq 0$ у тих точках, де $f = 0$. Залишилося помітити, що вектор нормалі поверхні $(f_u, f_v, -a\, f_u - b\, f_v)$ завжди ортогональний до постійного вектора $(a, b, 1) \neq 0$, що і задає напрямок, якому паралельні усі дотичні площини поверхні.

Задача 3.8. Розглянемо поверхню дотичних регулярної кривої ρ з задачі 2.14. Будемо вважати параметр s кривої натуральним. Тоді поверхня має параметризацію

$$r(s, v) = \rho(s) + v\,\rho'(s) = \rho(s) + v\,\tau(s).$$

Використовуючи формули Френе, отримуємо:

$$r_s = \tau + vk\,\nu,$$

$$r_v = \tau,$$

$$[r_s, r_v] = \begin{vmatrix} \tau & \nu & \beta \\ 1 & vk & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -vk\,\beta.$$

Зокрема, регулярність тут порушується при $v = 0$ (це точки вихідної кривої ρ, що може утворювати "ребро" на поверхні дотичних) і там, де $k(s) = 0$ (якщо кривина нульова на деякому проміжку, то на ньому крива є прямою, і поверхня дотичних також вироджується у цю пряму). У інших точках $r(s, v)$ вектор нормалі, таким чином, коректно визначений і колінеарний $\beta(s)$, тому дотична площина поверхні, що проходить через точку $r(s, v) = \rho(s) + v\,\tau(s)$ ортогонально до цього вектора має рівняння (у векторній формі)

$$\langle r - \rho(s) - v\,\tau(s), \beta(s) \rangle = 0,$$

де $r = (x, y, z)$ позначає довільну точку цієї площини. Рівняння нормальної прямої при цьому можно записати у параметричній векторній формі:

$$r = \rho(s) + v\,\tau(s) + t\,\beta(s),$$

де $t \in \mathbb{R}$ – параметр нормалі.

Оскільки $\tau(s)$ ортогональний до $\beta(s)$, рівняння дотичної площини можна спростити:

$$\langle r - \rho(s), \beta(s) \rangle = 0.$$

Це означає, що ця площина є щільнодотичною площиною кривої ρ у точці $\rho(s)$. Зокрема, дотична площина одна й та сама при фіксованому s для усіх v, тобто в усіх точках координатної лінії $s = s_0$ – дотичної до ρ, що є прямолінійною твірною нашої поверхні.

Зауважимо також, що сама твірна при цьому лежить у цій площині. І взагалі, пряма, що лежить на поверхні, лежить у дотичних площинах цієї поверхні у всіх точках прямої. Дійсно, дотична площина у точці містить дотичні до всіх кривих, що лежать у поверхні і проходять через цю точку, а дотичною до прямої є вона сама.