

Лекція 11. Дотична площина регулярної поверхні

11.1. Дотична площина поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлену радіус-вектором:

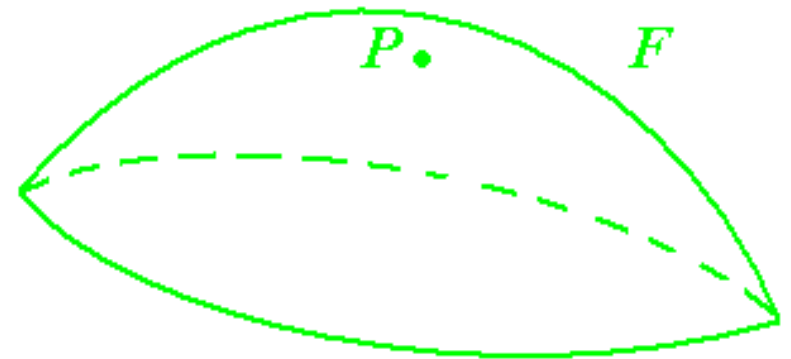
$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

За умовою регулярності, вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ є неперервно диференційовною, і при цьому $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ лінійно незалежні в кожній точці:

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \neq \vec{0}.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

З точки зору простору \mathbb{R}^3 точка P має радіус-вектор $\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$



Розглянемо регулярну криву γ на поверхні F в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P . У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

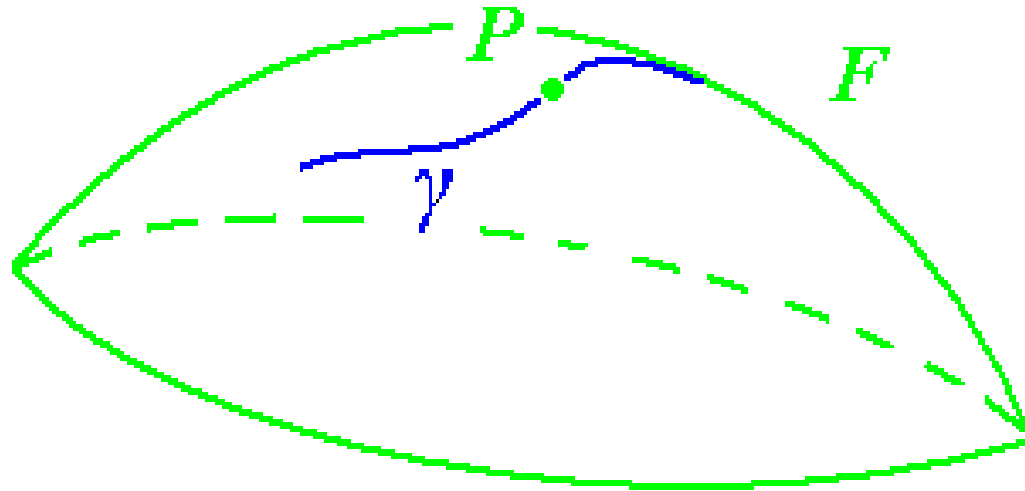
$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b),$$

так, що при деякому t_0 маємо

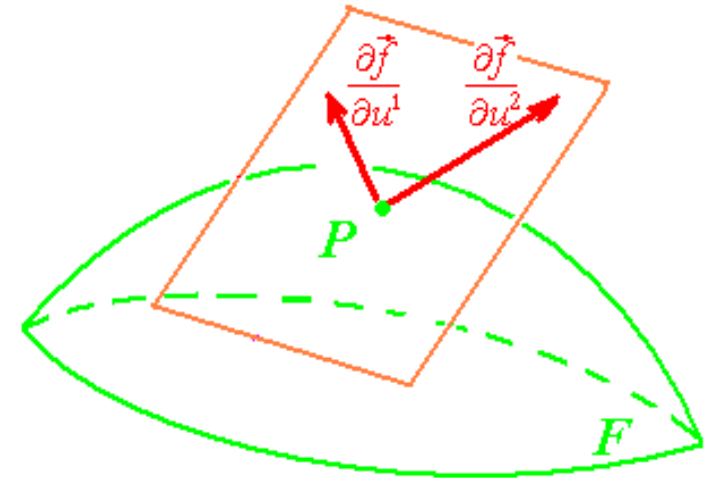
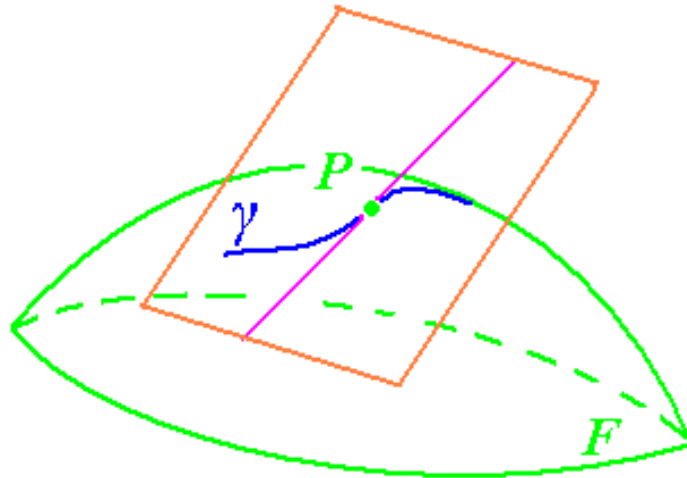
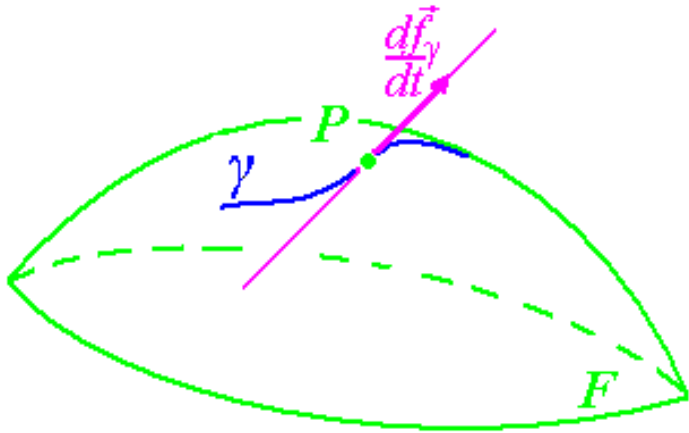
$$\begin{cases} u_0^1 = h^1(t_0) \\ u_0^2 = h^2(t_0) \end{cases}.$$

З точки зору простору \mathbb{R}^3 крива γ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)) = \vec{f}_\gamma(t)$$



Твердження. Дотична пряма кривої γ в точці P належить двомірній площині в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.



Доведення. Вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ є лінійно незалежними, оскільки поверхня F є регулярною. Тому вони однозначно визначають деяку площину Π в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P і є натягнутою на $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Для напрямного вектора кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$ є лінійною комбінацією векторів $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Як наслідок, дотична пряма кривої γ в точці P , яка проходить через точку P в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$, належить площині, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, що і вимагалось довести.

Твердження. Будь-яка пряма, що проходить через точку P в площині, натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, є дотичною прямою для деякої регулярної кривої, що проходить через точку P , на поверхні F .

Доведення. Візьмемо довільну пряму L , що проходить через точку P , в площині Π , натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$. Напрямний орт $\vec{\xi}$ цієї прямої L є лінійною комбінацією базисних векторів площини Π :

$$\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2$$

Розглянемо криву γ на поверхні F , що у внутрішніх локальних координатах задається у вигляді:

$$\begin{cases} u^1 = u_0^1 + \xi^1(t - t_0) \\ u^2 = u_0^2 + \xi^2(t - t_0) \end{cases}$$

Ця крива проходить через точку P .

Оскільки $\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

При цьому дотичний вектор цієї кривої в точці P має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial t}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2, \end{aligned}$$

тобто, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \vec{\xi}$. Отже, пряма L співпадає з дотичною прямою побудованої кривої γ в точці P , що і вимагалось довести.

Висновок-визначення. Якщо на регулярній параметрично заданій поверхні F зафіксувати точку P і розглядати довільні регулярні криві, які лежать на поверхні F і проходять через точку P , то дотичні прямі таких кривих будуть утворювати двомірну площину.

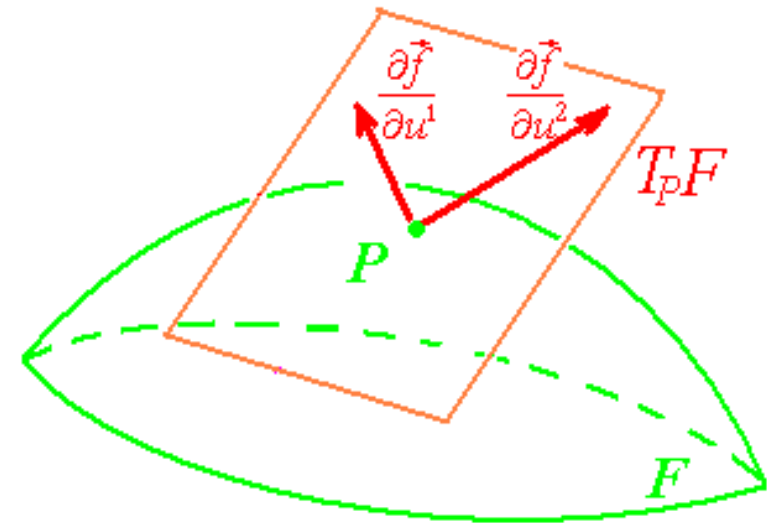
Ця площина називається *дотичною площиною* поверхні F в точці P і позначається $T_P F$.

За визначенням, дотична площина проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$



Перевіримо, що дотична площина визначена коректно – вона не змінюється при регулярних замінах локальних координат на поверхні F .

Коректність визначення дотичної площини

На регулярній параметрично заданій поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

зробимо регулярну заміну координат в околі точки P ,

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

і запишемо радіус-вектор поверхні в новій системі координат:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2).$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \end{aligned}$$

тобто,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}.$$

Як результат, регулярна зміна координат на поверхні F в околі точки P призводить до зміни базису в дотичній площині $T_P F$. Але сама дотична площина $T_P F$ при цьому залишається незмінною.

Таким чином, дотична площина $T_P F$ поверхні F в точці P визначена коректно, вона не залежить від вибору параметризації.

Висновок. В кожній точці P на регулярній параметрично заданій поверхні F однозначно визначається дотична площина $T_P F$.

Дотична площина – аналітичне задання

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

дотична площина $T_P F$ в точці $P (u_0^1, u_0^2)$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^1 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^2 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \quad -\infty < \lambda^1, \lambda^2 < \infty.$$

В координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Дотична площина – наближення першого порядку регулярної поверхні

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

запишемо перші доданки розкладання Тейлора в точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\begin{aligned} \vec{f}(u^1, u^2) = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) + \\ + o(\sqrt{(u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2}) \end{aligned}$$

Якщо обмежитись лише доданками першого порядку, отримаємо радіус-вектор дотичної площини $T_P F$:

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Висновок. Таким чином, дотична площина $T_P F$ є наближенням першого порядку (лінійною апроксимацією) регулярної параметрично заданої поверхні F в точці P .

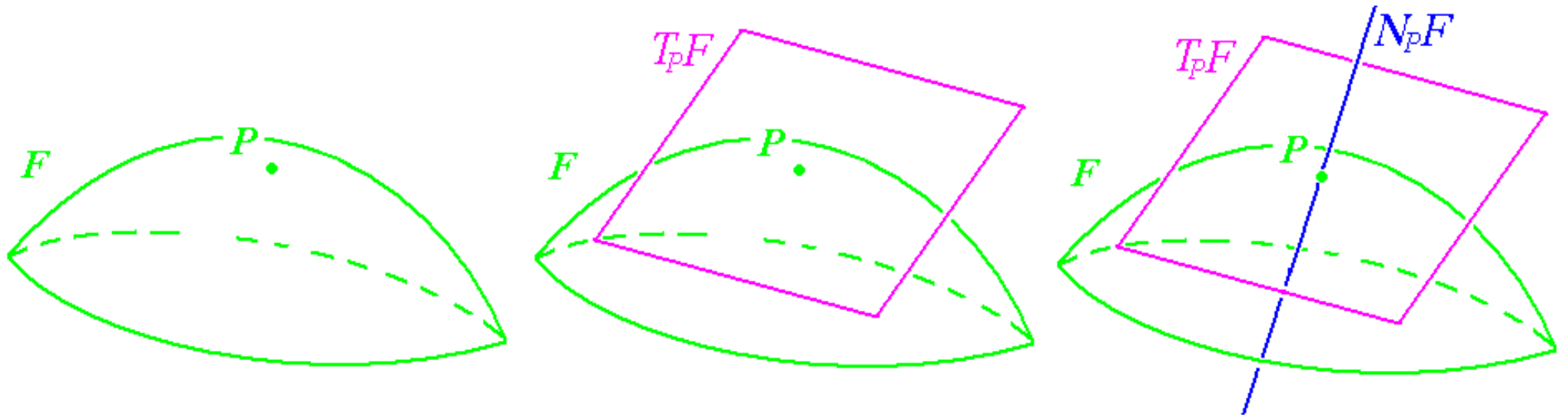
11.2. Нормальна пряма регулярної поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлена радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F і розглянемо дотичну площину $T_P F$ поверхні F в точці P .

Визначення. Пряма в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P ортогонально до дотичної площини $T_P F$, називається *нормальною прямою* поверхні F в точці P і позначається $N_P F$.



Оскільки в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні коректно визначено дотичну площину, то, як наслідок, в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні коректно визначено нормальну пряму.

Отже, в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні існує і є єдиною нормальна пряма.

Нормальна пряма – аналітичне задання

Нехай точка P має внутрішні координати (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

За визначенням, дотична площина $T_P F$ проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$

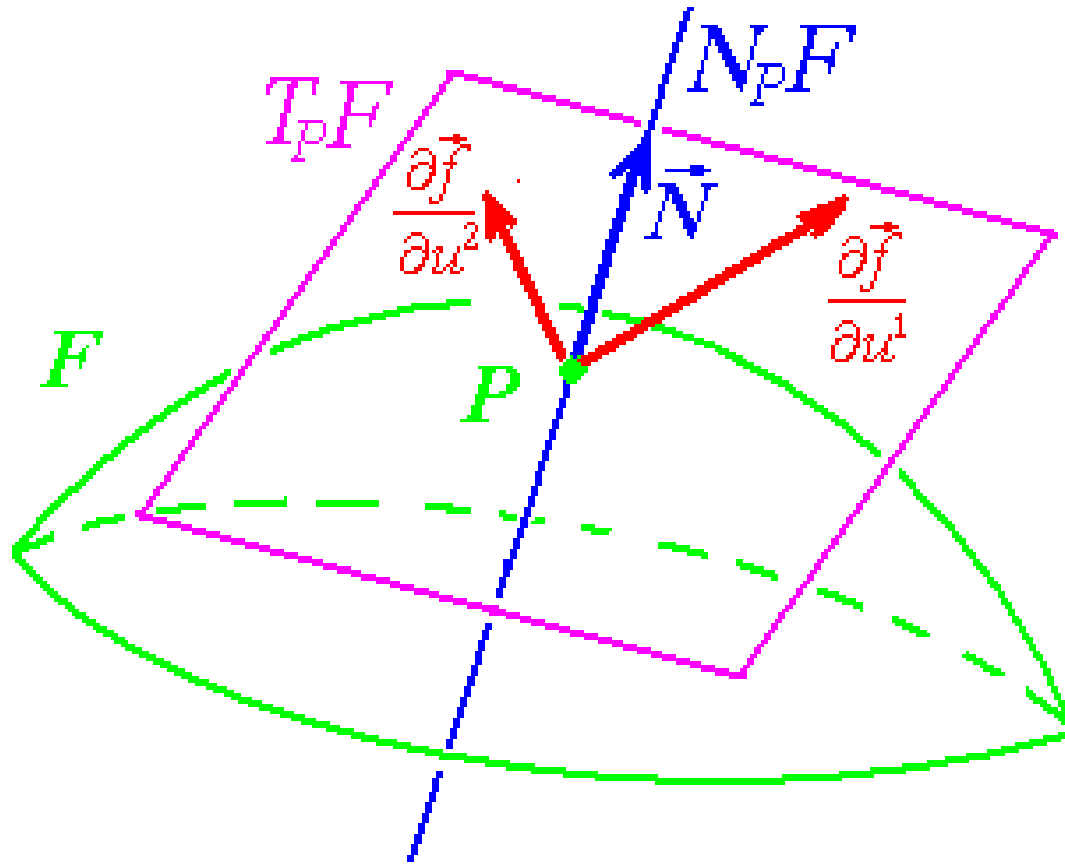
Нормаль дотичної площини $T_P F$ обчислюється за формулою

$$\vec{N}_P = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right].$$

За визначенням, вектор

$$\vec{N}_P = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right],$$

що є нормаллю дотичної площини $T_P F$, є одночасно і напрямним вектором нормальної прямої $N_P F$.



Тому нормальна пряма задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \vec{N}_P, \quad -\infty < t < \infty.$$

тобто,

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right], \quad -\infty < t < \infty,$$

або в координатному вигляді

$$\begin{array}{c} x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{c} x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2) \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{array} \right| \end{array}$$

11.3. Дотична площина і нормальна пряма явно заданої поверхні

Розглянемо явно задану поверхню F в \mathbb{R}^3

$$x^3 = z(x^1, x^2),$$

що є графіком неперервно диференційованої функції $\varphi(x^1, x^2)$.

Представимо поверхню F як параметрично задану:

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = z(u^1, u^2) \end{cases}.$$

Якщо взяти точку P з координатами $(x_0^1, x_0^2, z(x_0^1, x_0^2))$ на поверхні F , до дотична площина $T_P F$ буде задаватись у вигляді

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & 1 & 0 \\ x^2 - x_0^2 & 0 & 1 \\ x^3 - z(x_0^1, x_0^2) & \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) & \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \end{vmatrix} = 0,$$

тобто,

$$x^3 = z(x_0^1, x_0^2) + (x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2).$$

А нормальна пряма $N_P F$ задається рівнянням

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^3 - z(x_0^1, x_0^2)}{1}$$

Зауважимо, що вектор нормалі в точці P має вигляд

$$\vec{N}_P = \left(-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2), -\frac{\partial z}{\partial x^2}(u_0^1, u_0^2), 1 \right)$$

11.4. Дотична площина і нормальна пряма неявно заданої поверхні

Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в \mathbb{R}^3

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо точку $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ на поверхні F . В досить малому околі точки P поверхня F задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

так, що

$$\Phi(f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), f^3(u^1, u^2)) \equiv 0$$

Продиференціювавши, отримуємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \frac{\partial f^3}{\partial u^1} \equiv 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{\partial f^1}{\partial u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \equiv 0$$

Інакше кажучи, маємо

$$\left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right), \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1} \right) \right\rangle \equiv 0$$
$$\left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right), \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \right) \right\rangle \equiv 0$$

З огляду на регулярність поверхні F , ненульовий вектор

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right),$$

обчислений в точці P , є ортогональним до векторів

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1} \right) \quad \text{і} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2} \right),$$

обчисленим в точці P .

Оскільки $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ є базисними векторами дотичної площини $T_P F$,

то ортогональний їм вектор $\nabla \Phi$ є напрямним вектором нормальної прямої $N_P F$.

Таким чином, маємо

$$\vec{N}_P = \nabla\Phi(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right)$$

Рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$(x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^3 - x_0^3) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = 0$$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^3 - x_0^3}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)}$$