Задача 1. Розглянемо просту поверхню M^2 в $\mathbb{R}^3$. За визначенням, для кожної точки P на поверхні M^2 існує окіл U, який є топологічно еквівалентним (гомеоморфним) відкритому диску D в $\mathbb{R}^2$.

Окіл U разом з гомеоморфізмом φ: $D\to U$ утворюють *карту* на поверхні M^2 . Набір карт $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$, який покриває усю поверхню M^2, тобто $\bigcup_{j\in J} U_j \supset M$, утворює *атлас* поверхні M^2.

Яку найменшу кількість карт повинен мати атлас, якщо:

1) M^2 – це сфера

2) M^2 – це сфера з однією ручкою, тобто, M^2 – тор

**3)* M^2 – це сфера з двома ручками, тобто, M^2 – крендель

4) M^2 – це сфера з однією виколотою точкою

5) M^2 – це сфера з двома виколотою точкою

******6)* M^2 – це сфера з m ручками та n виколотими точками ?

Зауваження. Інтуітивно, щоб отримати карту, потрібно взяти диск (круг) на площині і про деформувати його – дозволяється розтягувати, стискувати, викривляти, вигинати, закручувати і т.д., але не можна нічого розривати і не можна нічого склеювати…

Побудова простої поверхні схожа на побудову моделі з пап'є-маше: вирізаємо клаптики (топологічно еквівалентні диску/кругу/квадрату) і поступово наклеюємо їх один на інший так, щоб разом вони утворили якусь складну поверхню.

Задача 2.1. Розглянемо поверхню F в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \qquad (u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$$

1) Якою є область задання D поверхні F?

2) Покажіть, що F є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні F.

Задача 2.2. Розглянемо поверхню $\widetilde{F}$ в $I\!R^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R\cdot\dfrac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \qquad \begin{matrix} -\infty<\widetilde{u}^1<\infty \\ -\infty<\widetilde{u}^2<\infty \end{matrix}$$

1) Якою є область задання $\widetilde{D}$ поверхні $\widetilde{F}$?

2) Покажіть, що $\widetilde{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $I\!R^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що $\widetilde{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\widetilde{F}$.

***Задача 2.3.** Розглянемо поверхню $\hat{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \dfrac{4\hat{u}^1}{\sqrt{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \dfrac{\hat{u}^2}{\sqrt{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2}}, \qquad \begin{matrix} -\infty < \hat{u}^1 < \infty \\ -\infty < \hat{u}^2 < \infty \end{matrix} \\ x^3 = R \cdot \dfrac{4-(\hat{u}^1)^2-(\hat{u}^2)^2}{\sqrt{4+(\hat{u}^1)^2+(\hat{u}^2)^2}} \end{cases}$$

1) Якою є область задання $\hat{D}$ поверхні $\hat{F}$?

2) Покажіть, що $\hat{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що $\hat{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\hat{F}$.

Задача 2.4. Розглянемо поверхні F і $\widetilde{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей F і $\widetilde{F}$.

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат(u^1, u^2) і $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (u^1, u^2) до $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ регулярною заміною координат?

***Задача 2.5.** Розглянемо поверхні $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$ із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$.

Проаналізуйте область Ω на сфері, що є перетином областей $\widetilde{F}$ і $\hat{F}$.

В області Ω одночасно діють дві системи внутрішніх координат$(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області Ω на сфері?

Чи є перехід від $(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ і $(\hat{u}^1, \hat{u}^2)$ регулярною заміною координат?

Задача 3. Розглянемо регулярну криву γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \qquad a < s < b,$$

в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – головними нормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Аналогічно, запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – бінормалями кривої γ. Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.