Задача 1.0. Розглянемо площину F, що проходить через точку $P(2,0,1)$ і натягнута на вектори (1,1,2) і (0,4,0). Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) площини F. Перевірте регулярність параметрично заданої площини F.

Розв'язання.

$$\vec{x} = \vec{x}_P + u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u^1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u^2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+u^1 \\ u^1+4u^2 \\ 1+2u^1 \end{pmatrix}, \qquad (u^1,u^2)\in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial \vec{f}}{du^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial \vec{f}}{du^2} \end{pmatrix} = Rank\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2$$

Відповідь: Параметрично задана площина F є регулярною поверхнею

Задача 1.1. Розглянемо циліндр F, утворений прямими, що проходять через точки кривої γ: $\begin{cases} x^1 = \cosh t \\ x^2 = t \\ x^3 = 0 \end{cases}$ і мають спільний напрямний вектор $\vec{a} = (1,0,1)$.

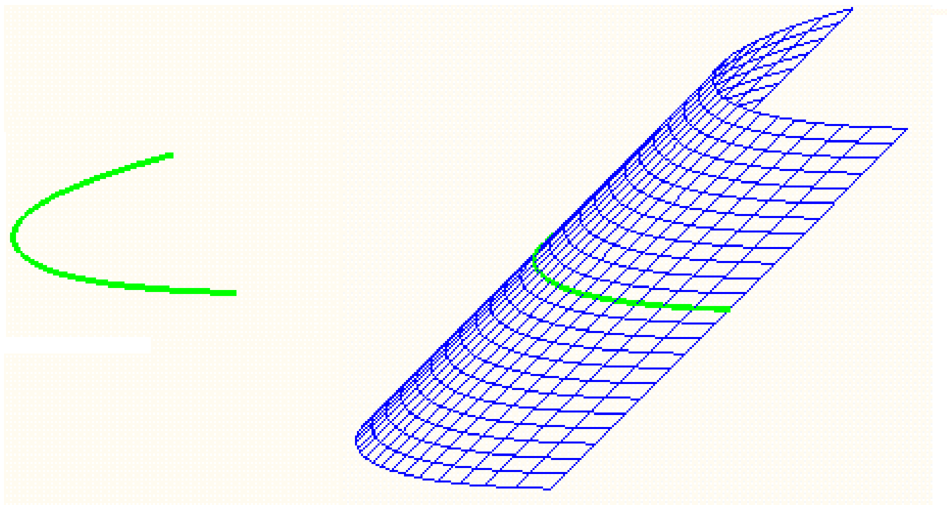
Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) циліндра F, перевірте регулярність циліндра. *Знайдіть криву, по якій циліндр F перетинається з площиною, ортогональною твірним прямим циліндра.

Розв'язання.

$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2\vec{e}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \\ u^1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 + u^2 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$



$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\cosh u^1+u^2\\ u^1\\ u^2\end{pmatrix}$$

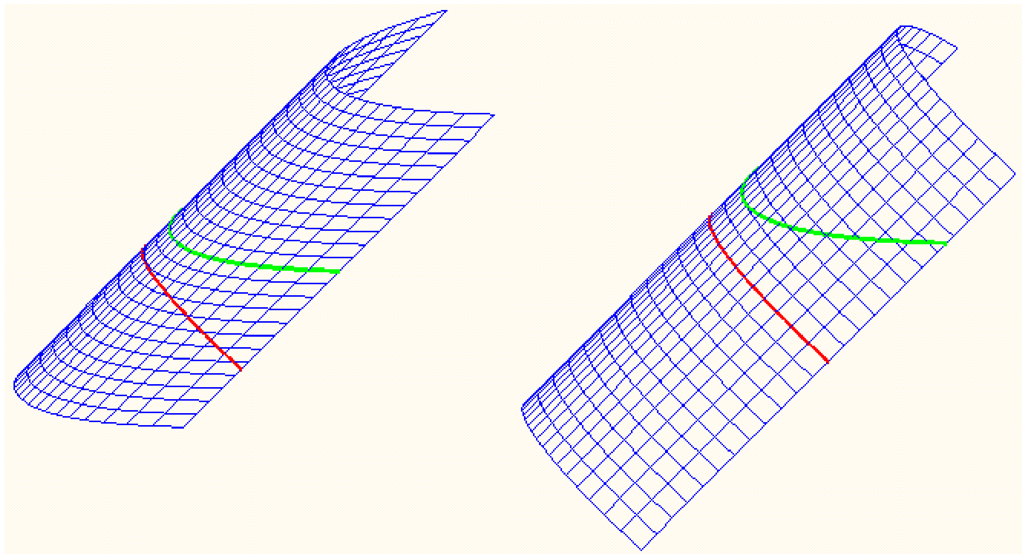
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^1}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sinh u^1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad Rank\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^1}\dfrac{\partial\vec{f}}{du^2}\end{pmatrix}=Rank\begin{pmatrix}\sinh u^1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\equiv 2$$

Відповідь: Заданий циліндр F є регулярною параметрично заданою поверхнею

**Додаток: Площина* $x^1+x^3=0$,*

$$\cosh u^1+2u^2=0,\quad u^2=-\frac{1}{2}\cosh u^1$$

$$\vec{f}(u^1,-\frac{1}{2}\cosh u^1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cosh u^1\\ 2u^1\\ -\cosh u^1\end{pmatrix}$$



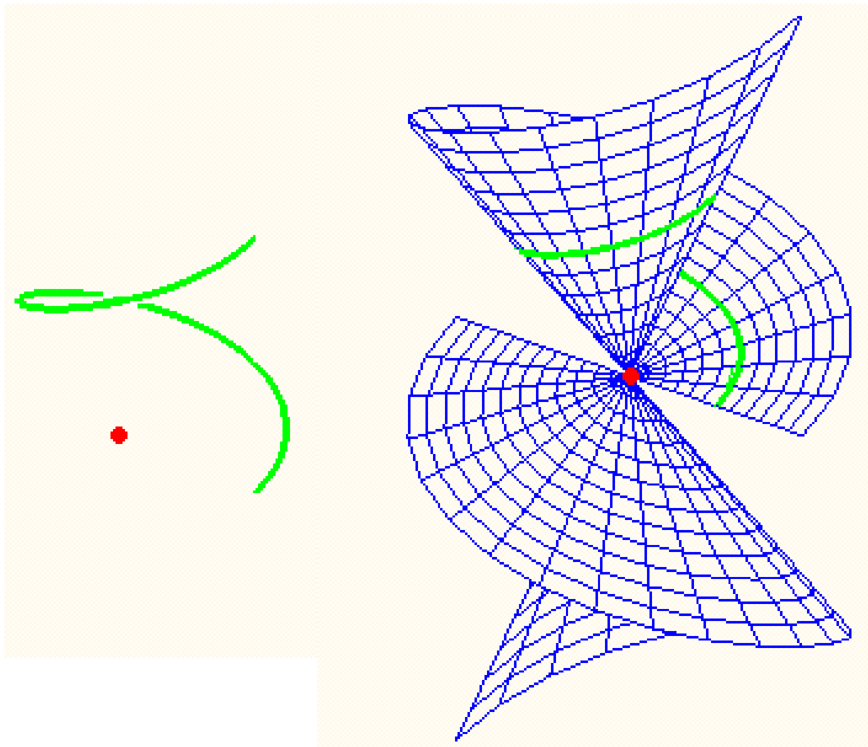
Задача 1.2. Розглянемо конус F, утворений прямими, що проходять через точку $O(0,0,0)$ і точки кривої γ: $\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$. Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) конуса F, перевірте регулярність конуса. *Знайдіть криву, по якій конус F перетинається зі сферою одиничного радіусу з центром в вершині конуса - точці O.

Розв'язання.

$$\vec{x} = (\vec{f}_\gamma(u^1) - \vec{x}_O) \cdot u^2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} \cdot u^2 = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^1 u^2 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$



$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix} ru^2\cos u^1 \\ ru^2\sin u^1 \\ hu^1u^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\vec{f}}{du^1} \frac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ru^2\sin u^1 & r\cos u^1 \\ ru^2\cos u^1 & r\sin u^1 \\ hu^2 & hu^1 \end{pmatrix},$$

$$[\frac{\partial\vec{f}}{du^1},\frac{\partial\vec{f}}{du^2}]=\begin{pmatrix} hru^2(u^1\cos u^1-\sin u^1) \\ hru^2(u^1\sin u^1+\cos u^1) \\ -r^2u^2 \end{pmatrix}, \qquad |[\frac{\partial\vec{f}}{du^1},\frac{\partial\vec{f}}{du^2}]|=r\cdot|u^2|\cdot\sqrt{h^2((u^1)^2+1)+r^2}$$

$$Rank\begin{pmatrix} \frac{\partial\vec{f}}{du^1} \frac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2\neq 0\,, \qquad Rank\begin{pmatrix} \frac{\partial\vec{f}}{du^1} \frac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}<2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2=0$$

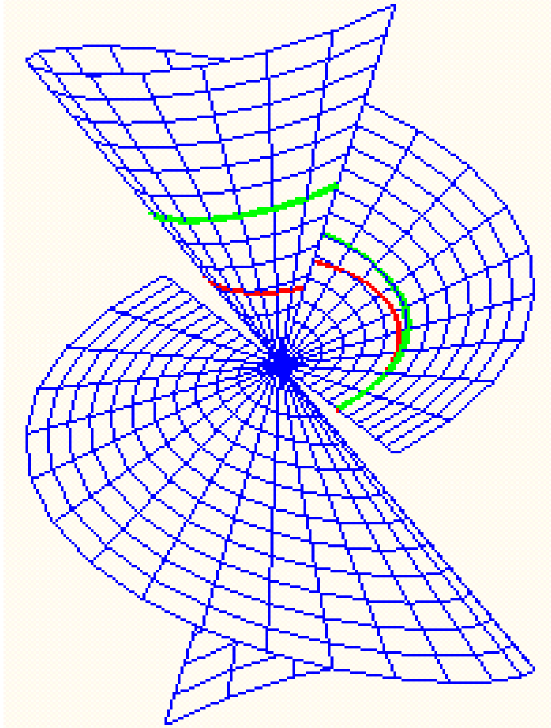
Відповідь: Заданий конус F є регулярною параметрично заданою поверхнею в усіх своїх точках,за виключенням вершини O

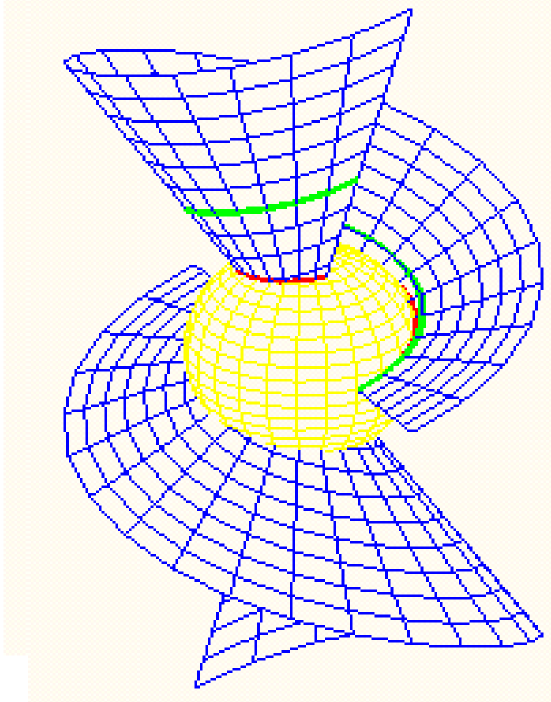
**Додаток:*

Сфера $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 1$

$$(r^2 + h^2(u^1)^2)\,(u^2)^2=1, \qquad u^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}$$

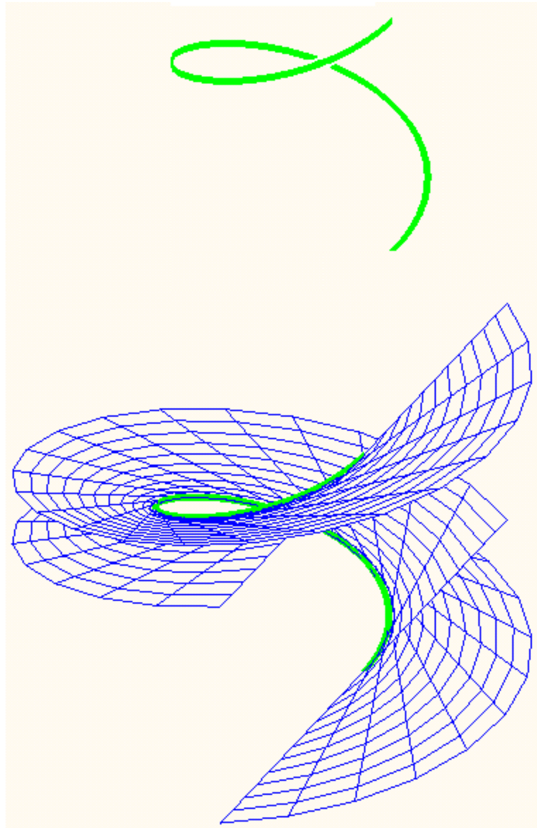
$$\vec{f}\left(u^1, \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2(u^1)^2}}\cdot\begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}$$





Задача 1.3. Розглянемо торсову поверхню F, утворену дотичними прямими гвинтової лінії γ: $\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$. Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) поверхні F, перевірте регулярність цієї поверхні.

Розв'язання.



$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2 \cdot \frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(u^1)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} -r\sin u^1 \\ r\cos u^1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ h(u^1 + u^2) \end{pmatrix}$$

$$0 < u^1 < 2\pi, \quad -\infty < u^2 < \infty$$

$$\vec{f}(u^1,u^2)=\begin{pmatrix} r(\cos u^1-u^2\sin u^1) \\ r(\sin u^1+u^2\cos u^1) \\ h(u^1+u^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -r(\sin u^1+u^2\cos u^1) & -r\sin u^1 \\ r(\cos u^1-u^2\sin u^1) & r\cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix}$$

$$Rank\begin{pmatrix} -r(\sin u^1+u^2\cos u^1) & -r\sin u^1 \\ r(\cos u^1-u^2\sin u^1) & r\cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix}=Rank\begin{pmatrix} -u^2\cos u^1 & -r\sin u^1 \\ -u^2\sin u^1 & r\cos u^1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}=2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2\neq 0\,, \qquad\qquad Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{du^1} & \dfrac{\partial\vec{f}}{du^2} \end{pmatrix}<2 \quad\Leftrightarrow\quad u^2=0,$$

Відповідь: Задана торсова поверхня F є регулярною параметрично заданою поверхнею всюди, за виключенням точок початкової гвинтової лінії (де $u^2=0$)

*__Задача 2.1.__ Проаналізуйте регулярність циліндричної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}$, утвореної прямими з напрямним вектором $\vec{a}$, що проходять через точки кривої γ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

Розв'язання:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \frac{d\vec{\xi}}{du^1}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{a}, \quad [\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\frac{d\vec{\xi}}{du^1}, \vec{a}]$$

Особливі точки на параметрично заданій циліндричній поверхні,

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = \vec{0},$$

виникають або якщо $\frac{d\vec{\xi}}{du^1} = \vec{0}$, тобто якщо базова крива γ містить сингулярну точку (і тоді уся твірна пряма циліндра, яка проходить через особливу точку базової кривої, буде особливим ребром на циліндрі), або якщо в якійсь точці на базовій кривій γ її дотичний вектор є колінеарним напрямному вектору $\vec{a}$ твірних прямих циліндра.

[*]**Задача 2.2.** Проаналізуйте регулярність конічної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = u^2 \cdot \vec{a}(u^1)$, утвореної прямими, що проходять через точку *O(0,0,0)* і точки кривої з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{a}(u^1)$.

Розв'язання:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = u^2 \cdot \vec{a}(u^1), \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = u^2 \cdot \frac{d\vec{a}}{du^1}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{a}, \quad [\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = u^2 \cdot [\frac{d\vec{a}}{du^1}, \vec{a}]$$

Особливі точки на параметрично заданій конічній поверхні,

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = \vec{0},$$

виникають або якщо $u^2 = 0$, що відповідає вершині конусу, або якщо в якійсь точці на базовій кривій γ виконано $[\frac{d\vec{a}}{du^1}, \vec{a}] = \vec{0}$ і тоді уся твірна пряма конуса, яка проходить через відповідну точку базової кривої, буде особливим ребром на конусі.

*__Задача 2.3.__ Проаналізуйте регулярність торсової поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$, утвореної дотичними прямими кривої γ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

Розв'язання: $\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \vec{\tau} + u^2 \cdot k\vec{\nu}\ , \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{\tau}\ , \qquad [\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = u^2 \cdot k[\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$

Особливі точки на параметрично заданій торсовій поверхні,

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = \vec{0},$$

виникають або якщо $u^2 = 0$, що відповідає точкам початкової кривої γ, яку є особливим ребром на торсовій поверхні, або якщо в якійсь точці на базовій кривій γ кривина $k=0$, і тоді уся твірна пряма торсової поверхні, яка проходить через відповідну точку перегину базової кривої γ, буде особливим ребром на торсовій поверхні.

**__Задача 2.4.__ Чи може циліндрична поверхня бути площиною?

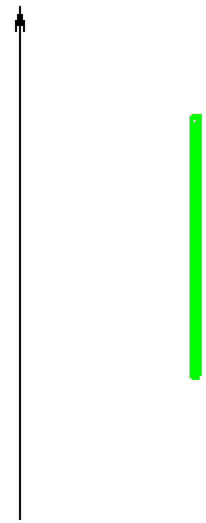
[**]**Задача 2.5.** Чи може конічна поверхня бути площиною?

[**]**Задача 2.6.** Чи може торсова поверхня бути площиною?

Задача 3.1.1. Розглянемо вертикальну пряму $x^1=r>0$ в площині x^1x^3. Яка поверхня утворюється в $I\!R^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

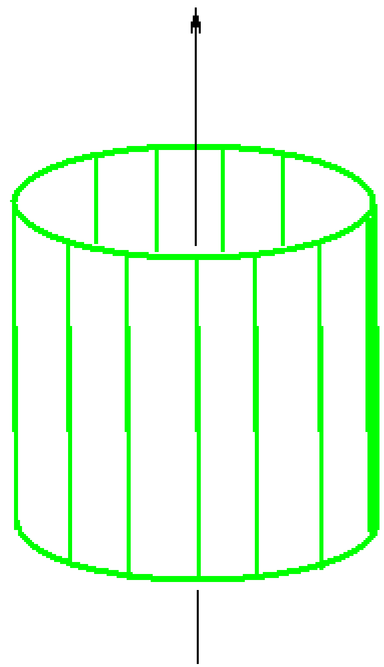
Розв'язання. Пряма γ задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \\ x^2 = 0 \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$



Відповідна поверхня обертання (навколо осі x^3) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{pmatrix},$$



тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \ \alpha < \varphi < \beta.$$

Вектор-функція

$$\vec{f}(t,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial t} & \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi} \end{pmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\equiv 2.$$

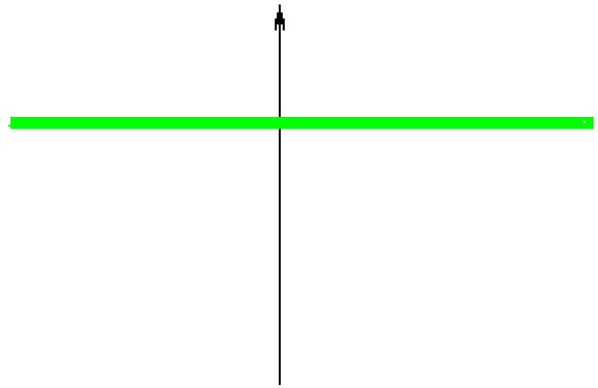
Таким чином, задана поверхня обертання – це круговий циліндр. Поверхня є регулярною, на ній немає особливих точок.

Відповідь: $\begin{cases} x^1=r\cos\varphi \\ x^2=r\sin\varphi\ , \quad -\infty<t<\infty,\ \ \alpha<\varphi<\beta. \\ x^3=t \end{cases}$

Задача 3.1.2. Розглянемо горизонтальну пряму $x^3=r>0$ в площині x^1x^3. Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

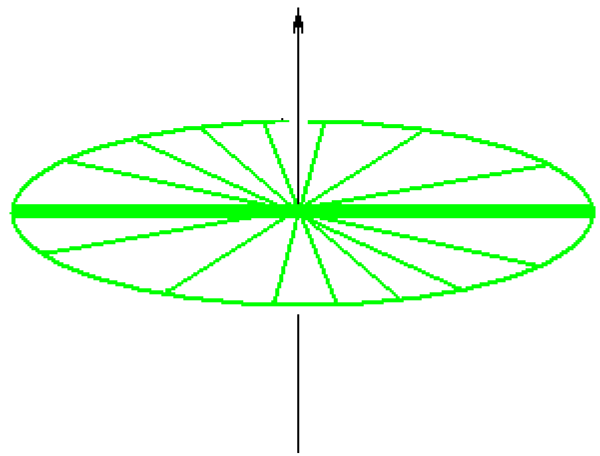
Розв'язання. Пряма γ задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = 0 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$



Відповідна поверхня обертання F (навколо осі x^3) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ r \end{pmatrix},$$



тобто,

$$\begin{cases} x^1 = t\cos\varphi \\ x^2 = t\sin\varphi \\ x^3 = r \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Вектор-функція

$$\vec{f}(t,\varphi)=\begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\text{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial t} & \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi} \end{pmatrix}=\text{Rank}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -t\sin\varphi \\ \sin\varphi & t\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В точках з $t \neq 0$ маємо Rank $J = 2$. В точках з $t = 0$ маємо Rank $J = 1$.

Отже, задана поверхня обертання F – горизонтальна площина – має єдину особливу точку $P(0,0,r)$, що відповідає значенню $t=0$. В усіх інших точках умови регулярності будуть виконані, тому задана поверхня F з виколотою точкою P буде регулярною параметрично заданою поверхнею.

Відповідь: $\begin{cases} x^1 = t\cos\varphi \\ x^2 = t\sin\varphi \\ x^3 = r \end{cases}$, $\quad -\infty < t < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi.$

Задача 3.2. Розглянемо ланцюгову лінію

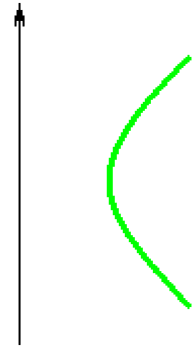
$$\begin{cases} x^1 = r\cosh t \\ x^3 = t \end{cases}$$

Яка поверхня утворюється в $I\!R^3$ обертанням цієї лінії навколо осі x^3*?*

Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв'язання. Крива γ задається параметрично

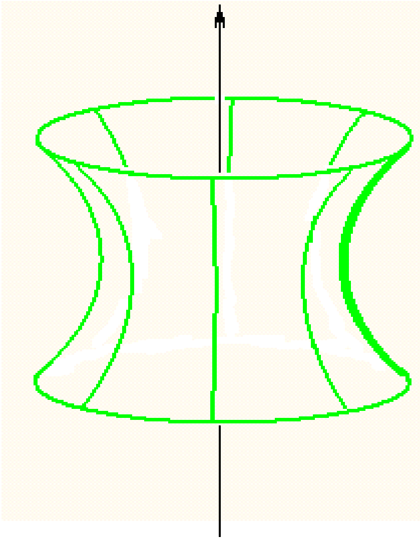
$$\begin{cases} x^1 = r\cosh t \\ x^2 = 0 \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$



Відповідна поверхня обертання F (навколо осі x^3) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cosh t \ \cos\varphi \\ r\cosh t \ \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{тобто,} \quad \begin{cases} x^1 = r\cosh t\cos\varphi \\ x^2 = r\cosh t\sin\varphi \\ x^3 = t \end{cases},$$

$$-\infty < t < \infty, \ \ 0 < \varphi < 2\pi.$$



Вектор-функція

$$\vec{f}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cosh t \ \cos\varphi \\ r\cosh t \ \sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial t} & \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} r\sinh t\cos\varphi & -r\cosh t\sin\varphi \\ r\sinh t\sin\varphi & r\cosh t\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Отже, задана поверхня обертання F є регулярною параметрично заданою поверхнею. Вона називається *катеноїд*.

Відповідь: $\begin{cases} x^1 = r\cosh t\cos\varphi \\ x^2 = r\cosh t\sin\varphi \\ \quad x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \ 0 < \varphi < 2\pi.$

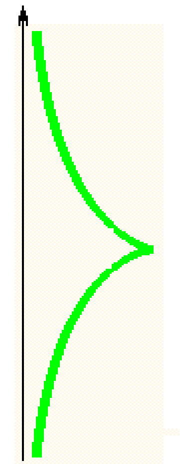
Задача 3.3. Розглянемо трактрису $\begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{\cosh t} \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}$

Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням цієї лінії навколо осі x^3?

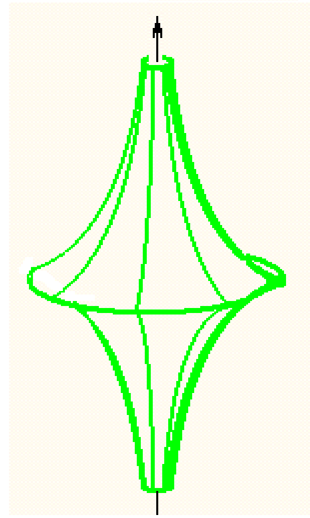
Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв'язання. Крива γ задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = \dfrac{r}{\cosh t} \\ x^2 = 0 \\ x^3 = r(t - \tanh t) \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$



Відповідна поверхня обертання F (навколо осі x^3) задається радіус-вектором



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t}\cos\varphi \\ \dfrac{1}{\cosh t}\sin\varphi \\ t - \tanh t \end{pmatrix}, \quad \text{тобто,} \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{\cosh t}\cos\varphi \\ x^2 = \dfrac{1}{\cosh t}\sin\varphi \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < t < \infty \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{matrix}.$$

Вектор-функція $\vec{f}(t,\varphi)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t}\cos\varphi \\ \frac{1}{\cosh t}\sin\varphi \\ t-\tanh t \end{pmatrix}$

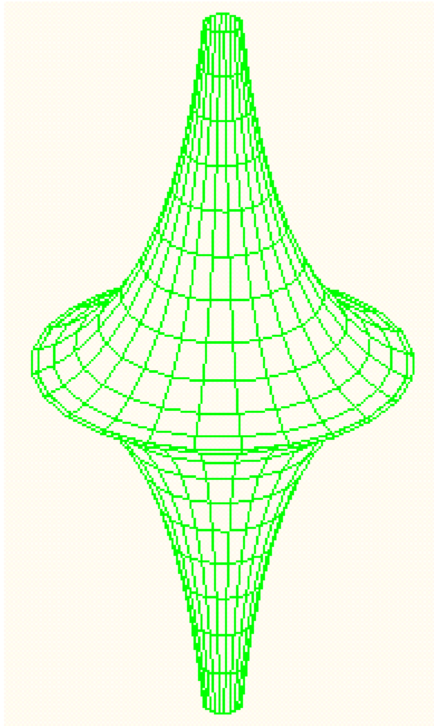
є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial\vec{f}}{\partial t} & \frac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\cos\varphi & -\frac{1}{\cosh t}\sin\varphi \\ -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\sin\varphi & \frac{1}{\cosh t}\cos\varphi \\ \tanh^2 t & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо *t≠0*, то *Rank J=2* і умова регулярності виконана.

Якщо ж *t=0*, то *Rank J<2* і умова регулярності порушена. Отже, задана поверхня обертання *F* має особливі точки (які утворюють ребро поверхні) і тому не є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Поверхня називається *псевдосфера* або *поверхня Бельтрамі*



Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{\cosh t}\cos\varphi \\ x^2 = \dfrac{1}{\cosh t}\sin\varphi \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}$, $\quad \begin{matrix} -\infty < t < \infty \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{matrix}$

*[*]**Задача 3.4.** Розглянемо поверхню в $I\!R^3$, утворену обертанням кривої γ

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

навколо осі x^3. Запишіть радіус-вектор цієї поверхні, перевірте її регулярність та зробіть висновок про те, коли на поверхні обертання можуть виникнути особливі точки (де порушується умова регулярності).

Розв'язання. Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(t)\cos\varphi \\ x^2 = r(t)\sin\varphi\,, \quad a < t < b,\ \alpha < \varphi < \beta. \\ \quad x^3 = h(t) \end{cases}$$

Умова регулярності:

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial t} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial t} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial t} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Маємо: $$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t} & \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{dr}{dt}\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \frac{dh}{dt} & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо $r(t_0)=0$, тобто, коли меридіан перетинає вісь обертання, Rank $J < 2$. Отже, при $t=t_0$ умова регулярності порушена, отримаємо особливу точку V на параметризованій поверхні обертання. Координати цієї особливої точки як точки в просторі $V(0, 0, h(t_0))$.

Якщо $\frac{dr}{dt}(t_0)=0$, $\frac{dh}{dt}(t_0)=0$, тобто, коли на меридіані є особлива точка, то тоді Rank $J < 2$. Отже, при $t=t_0$ умова регулярності порушена, також отримаємо особливу точку V на параметризованій поверхні обертання. Координати цієї особливої точки як точки в просторі $V\,(r(t_0)\cos\varphi,\ r(t_0)\sin\varphi,\ h(t_0))$ залежать від кута обертання φ. Таким чином, на поверхні обертання виникає коло особливих точок поверхні, утворене обертанням особливої точки меридіана.

Якщо меридіан не перетинає вісь обертання і не має особливих точок, поверхня обертання буде регулярною параметрично заданою поверхнею.

Задача 4. Проаналізуйте регулярність наступних неявно заданих поверхонь та, якщо є, вкажіть особливі (сингулярні) точки, де порушуються умови регулярності:

1) площина: $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0$

2) еліпсоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 = 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

3) гіперболоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 = \pm 1 \;, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

4) параболоїд: $x^3 = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2 \;, \quad a_1 > 0, a_2 > 0$

5) лінійчата поверхня: $\Phi(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}) = 0$

6) циліндрична поверхня: $\Phi(x^1, x^2) = 0$

7) поверхня обертання: $\Phi((x^1)^2 + (x^2)^2 , x^3) = 0$

8) кубічна поверхня: $x^1 x^2 x^3 = a_0$

Розв'язання.

1) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_0$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 = 0 \\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на площині F немає особливих точок. Це означає, що площина F є регулярною неявно заданою поверхнею.

2) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 - 1$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 + a_3(x^3)^2 - 1 = 0 \\ 2a_1 x^1 = 0,\ 2a_2 x^2 = 0,\ 2a_3 x^3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на еліпсоїді F немає особливих точок. Це означає, що еліпсоїд F є регулярною неявно заданою поверхнею.

3) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 \mp 1$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 \mp 1 = 0 \\ 2a_1 x^1 = 0,\ 2a_2 x^2 = 0,\ 2a_3 x^3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на гіперболоїді F немає особливих точок. Це означає, що гіперболоїд F є регулярною неявно заданою поверхнею.

4) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2 - x^3$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2 - x^3 = 0 \\ 2a_1 x^1 = 0,\ 2a_2 x^2 = 0,\ 1 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на параболоїді F немає особливих точок. Це означає, що параболоїд F є регулярною неявно заданою поверхнею.

5) Рівняння $\Phi(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}) = 0$ задає нам лінійчату поверхню: якщо координати якоїсь точки $P(p^1,p^2,p^3)$ задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь якої точки $Q(tp^1,tp^2,tp^3)$ прямої OP. Оскільки всі прямі проходять через точку O, поверхня F є конусом з вершиною в точці O. Саму точку O вважаємо виколотою, бо там $x^3=0$.

Проведемо горизонтальну площину $x^3=1$. Площина перетинає конус F по деякій кривій γ, що задається в цій площині рівнянням $\Phi(x^1, x^2) = 0$. Отже, конус F утворений прямими,що проходять через точку O і через точки кривої γ.

Перевіримо регулярність конуса.

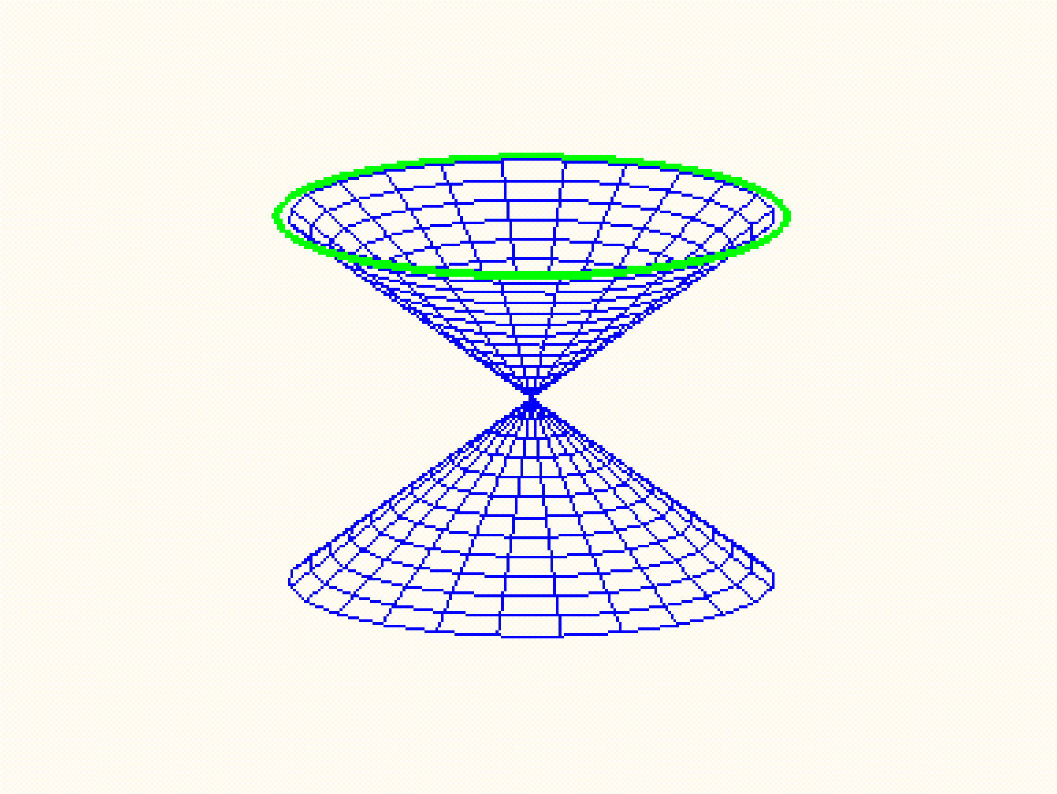
Припустимо, що функція $\Phi(y^1, y^2)$ є C^l-гладкою.

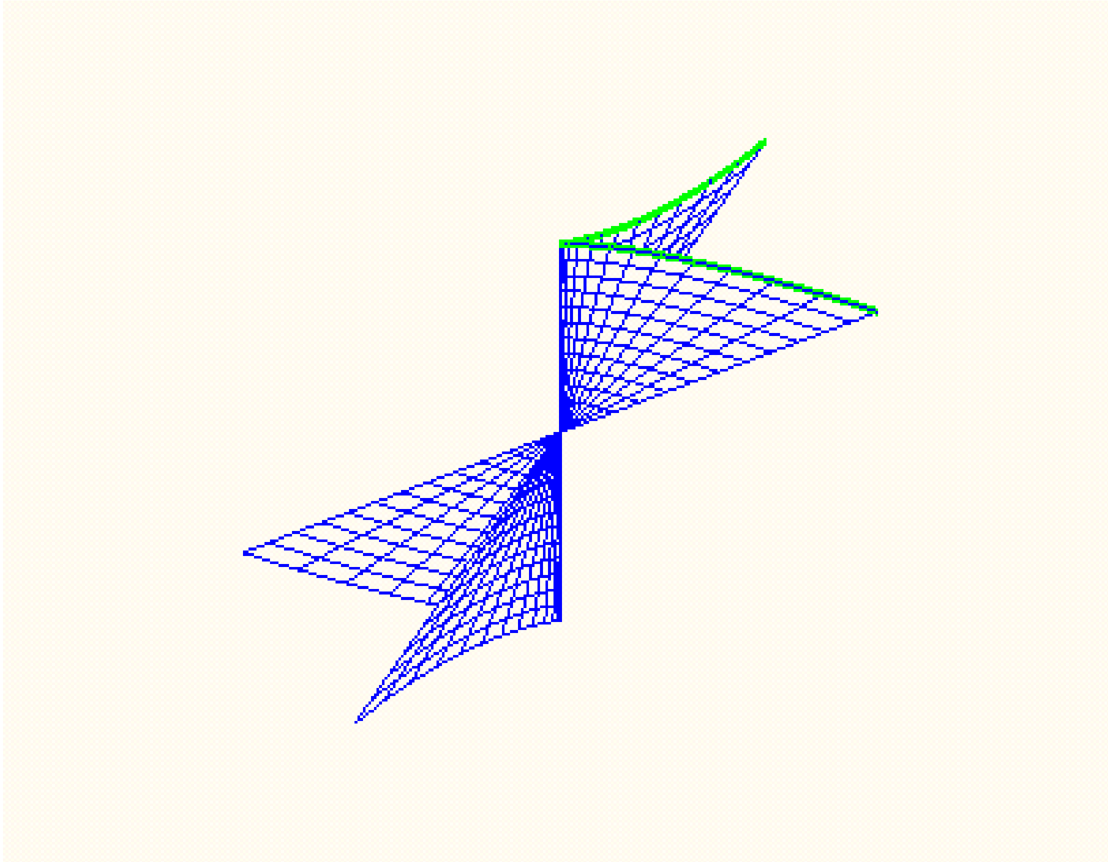
Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi(\dfrac{x^1}{x^3}, \dfrac{x^2}{x^3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(\dfrac{x^1}{x^3}, \dfrac{x^2}{x^3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y^1}\dfrac{1}{x^3} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y^2}\dfrac{1}{x^3} = 0, \ -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^1}\dfrac{x^1}{(x^3)^2} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y^2}\dfrac{x^2}{(x^3)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(y^1, y^2) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y^1} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно задана крива γ є регулярною, то конус F (з виколотою вершиною O) буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на кривій γ є особлива точка P_0, то на конусі F отримаємо цілу пряму OP_0, точки якої особливими точками конуса F. Інакше кажучи, пряма OP_0 буде представляти собою ребро на конусі F.





6) Рівняння $\Phi(x^1, x^2) = 0$ задає нам лінійчату поверхню: якщо координати якоїсь точки $P(p^1,p^2,p^3)$ задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь якої точки $Q(p^1,p^2,t)$ вертикальної прямої, що проходить через точку P. Оскільки всі такі прямі є паралельними (вертикальній координатній осі x^3), поверхня F є циліндром.

Проведемо горизонтальну площину $x^3=0$. Площина перетинає циліндр F по деякій кривій γ, що задається в цій площині рівнянням $\Phi(x^1, x^2) = 0$. Отже, циліндр F утворений вертикальними прямими, що проходять через точки кривої γ.

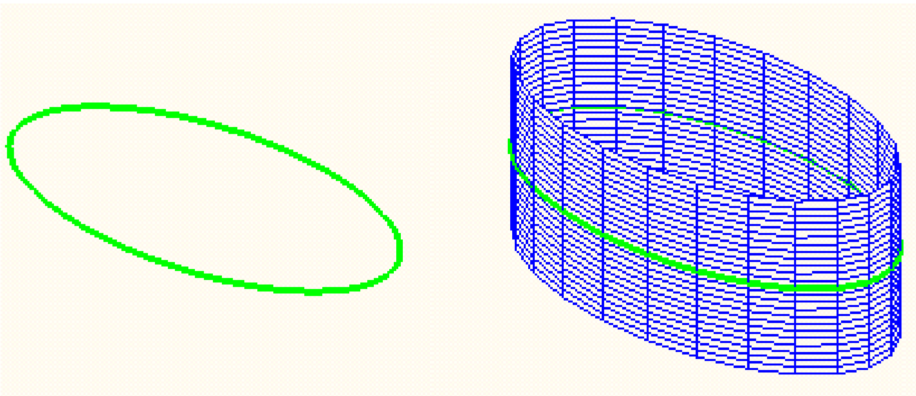
Перевіримо регулярність циліндра.

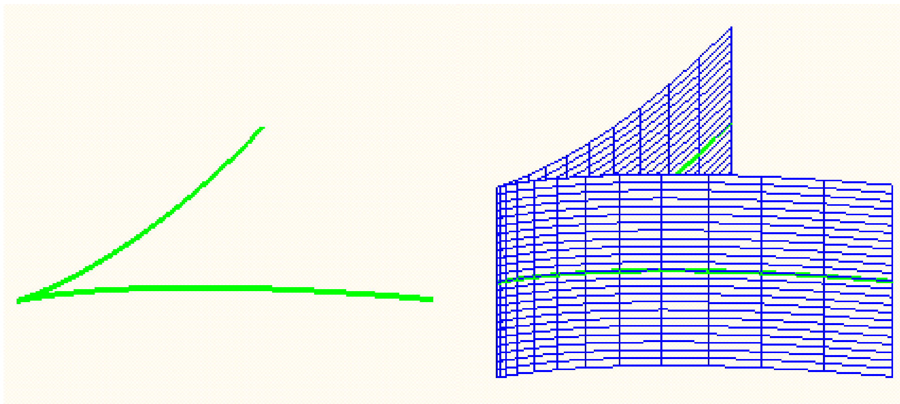
Припустимо, що функція $\Phi(x^1, x^2)$ є C^1-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0, \ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно задана крива γ є регулярною, то циліндр F буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на кривій γ є особлива точка P_0, то на циліндрі F отримаємо цілу пряму OP_0, точки якої особливими точками циліндра F. Інакше кажучи, пряма OP_0 буде представляти собою ребро на циліндрі F.





7) Рівняння $\Phi(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2},x^3)=0$ задає поверхню обертання F: якщо координати якоїсь точки $P(p^1,0,p^3)$ задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь-якої точки $Q(p^1\cos\varphi, p^1\sin\varphi, p^3)$, отриманої з точки P обертанням навколо координатної вертикальної осі x^3.

Рівняння $\Phi(x^1, x^3) = 0$ задає в координатній площині x^1x^3 меридіан γ поверхні обертання F. Перевіримо регулярність поверхні F.

Припустимо, що функція $\Phi(r,x^3)$ є C^1-гладкою.

Якщо меридіан γ перетинає вісь обертання, тобто, в якійсь точці $B(0,h)$ виконано $\Phi(0,h)=0$, то функція $\Phi(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2},x^3)$ може не бути неперервно диференційованою в точці $B(0,0,h)$. Тобто в такій точці може порушуватись умова регулярності поверхні обертання.

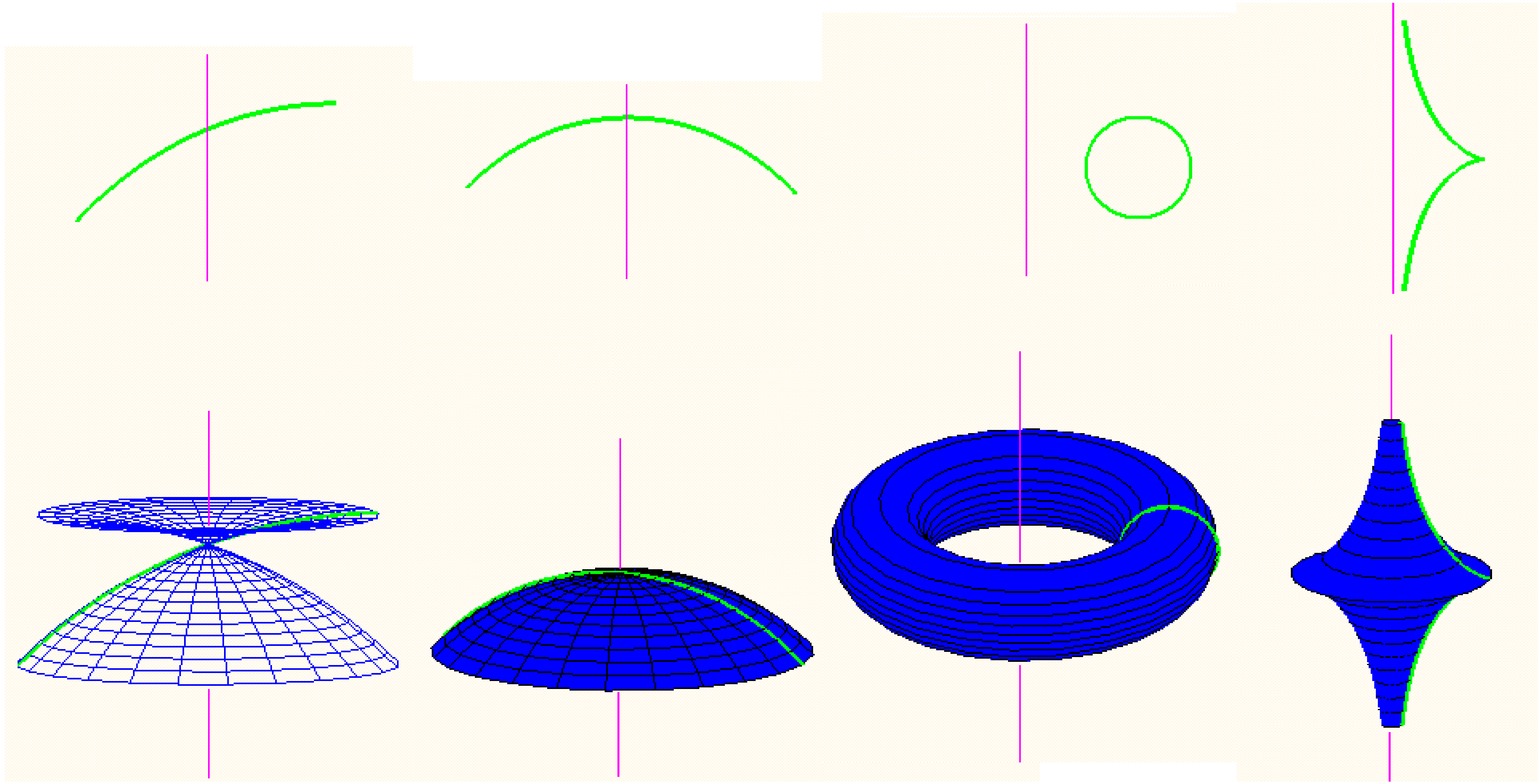
Припустимо, що поверхня обертання F не містить точок на осі обертання, де $x^1=0$, $x^2=0$. Тоді функція $\Phi(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}, x^3)$ буде C^1-гладкою*.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}, x^3) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} = 0, \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \Phi(r, x^3) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно заданий меридіан γ є регулярною кривою, то і поверхня обертання F буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на меридіані γ є особлива точка P_0, то на поверхні F маємо ціле коло особливих точок поверхні, отримане обертанням точки P_0 навколо осі x^3. Інакше кажучи, таке коло буде представляти собою ребро на поверхні обертання F.



8) Функція $\Phi(x^1,x^2,x^3) = x^1 x^2 x^3 - a_0$ є C^∞-гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^1} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1x^2x^3 - a_0 = 0 \\ x^2x^3 = 0,\ x^1x^3 = 0,\ x^1x^2 = 0 \end{cases}$$

Якщо $a_0 \neq 0$, то система не має розв'язків. Значить, на поверхні F немає особливих точок. Це означає, що поверхня F є регулярною неявно заданою поверхнею.

Якщо ж $a_0 = 0$, то система матиме розв'язок $x^1=x^2=0$, або $x^1=x^3=0$, або $x^2=x^3=0$. То ж поверхня F міститиме три прямих, складених з особливих точок.