

Лекція 10. Регулярна заміна координат. Криві на поверхні. Дотична площина регулярної поверхні

Параметрично задані поверхні: $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D$

Явно задані поверхні: $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \Omega$

Неявно задані поверхні: $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$

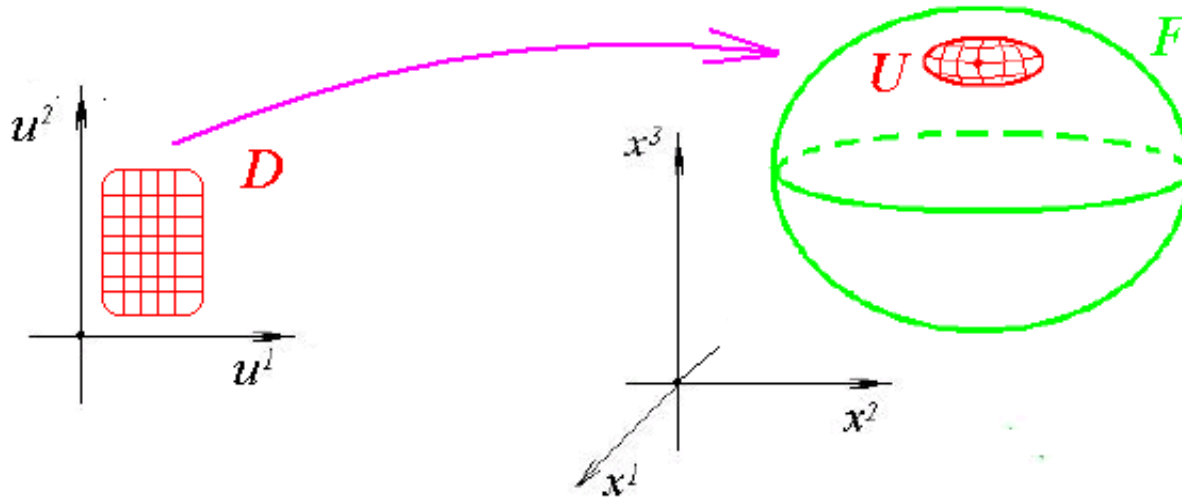
За виконання умов **регулярності**:

1) параметрично задана поверхня локально (з точки зору області D) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних,

2) неявно задана поверхня локально (з точки зору об'ємного простору \mathbb{R}^3) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних.

Розглянемо просту поверхню F в \mathbb{R}^3 .

За визначенням, для кожної точки P існує окіл B в \mathbb{R}^3 такий, що окіл $U=B \cap F$ точки P на поверхні F є елементарною поверхнею, тобто окіл U є гомеоморфним деякій області D в \mathbb{R}^2 .



Окіл B разом з гомеоморфізмом $\varphi: D \rightarrow U$ називають *картою* або *параметризацією* навколо точки P на поверхні F .

З аналітичної точки зору, відображення φ представляється вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$. Величини (u^1, u^2) називаються *координатами* точок в карті B на поверхні F або *локальними координатами* на поверхні F .

Набір карт, що покривають усю поверхню F , утворюють *атлас* поверхні F .

Проблема. Чи можна перевірити, що відображення $\varphi: D \rightarrow U$ є гомеоморфізмом¹, коли відображення φ задано у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases},$$

тобто, в термінах вектор-функції $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$?

Відповідь. Якщо вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ задовольняє умовам регулярності:

(a) $\vec{f} \in C^m(D)$, $m \geq 1$,

(b) $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] \neq \vec{0}$,

то тоді відображення $\varphi: D \rightarrow U$ локально є гомеоморфізмом.

Зауваження. Умова регулярності є достатньою, але не є необхідною для забезпечення локальної гомеоморфності.

¹ Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом, якщо (а) відображення є неперервним, (б) відображення є бієктивним, (с) обернене відображення є неперервним.

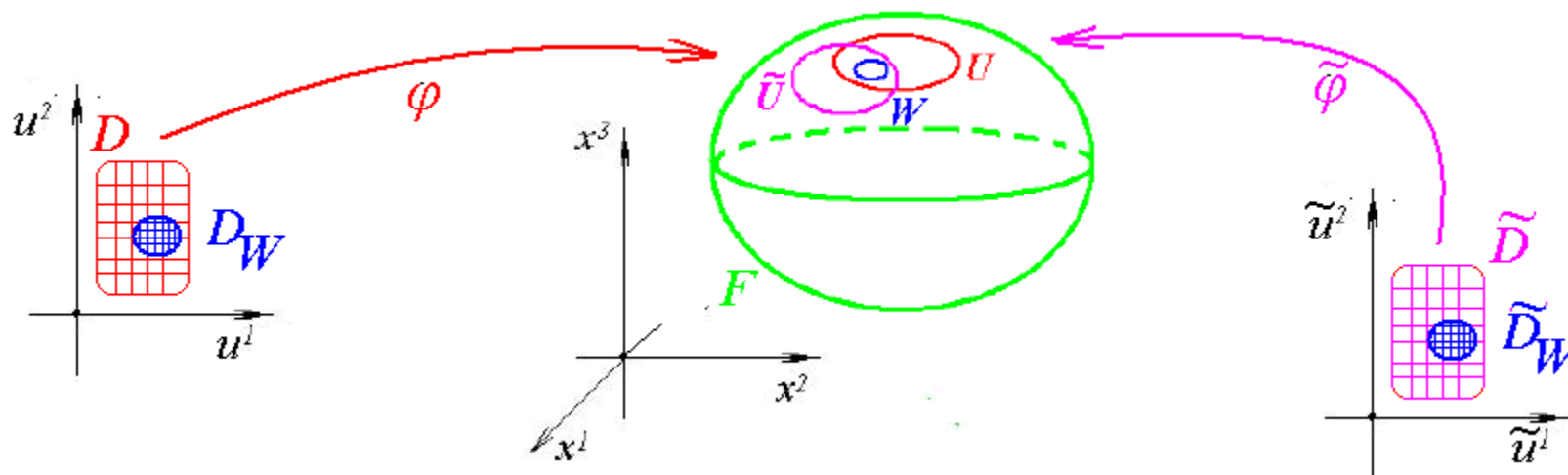
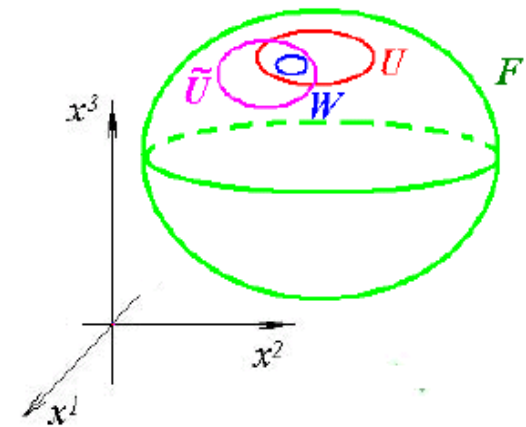
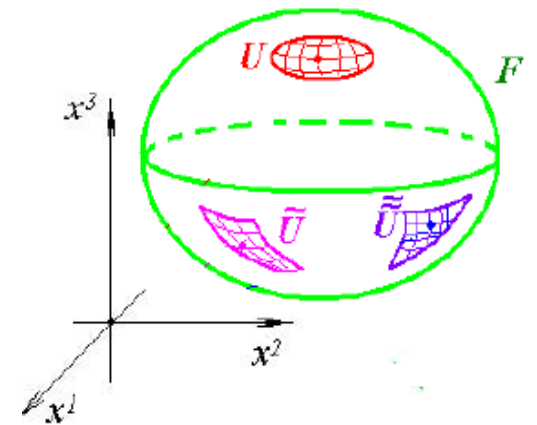
10.1. Регулярна заміна координат на поверхні

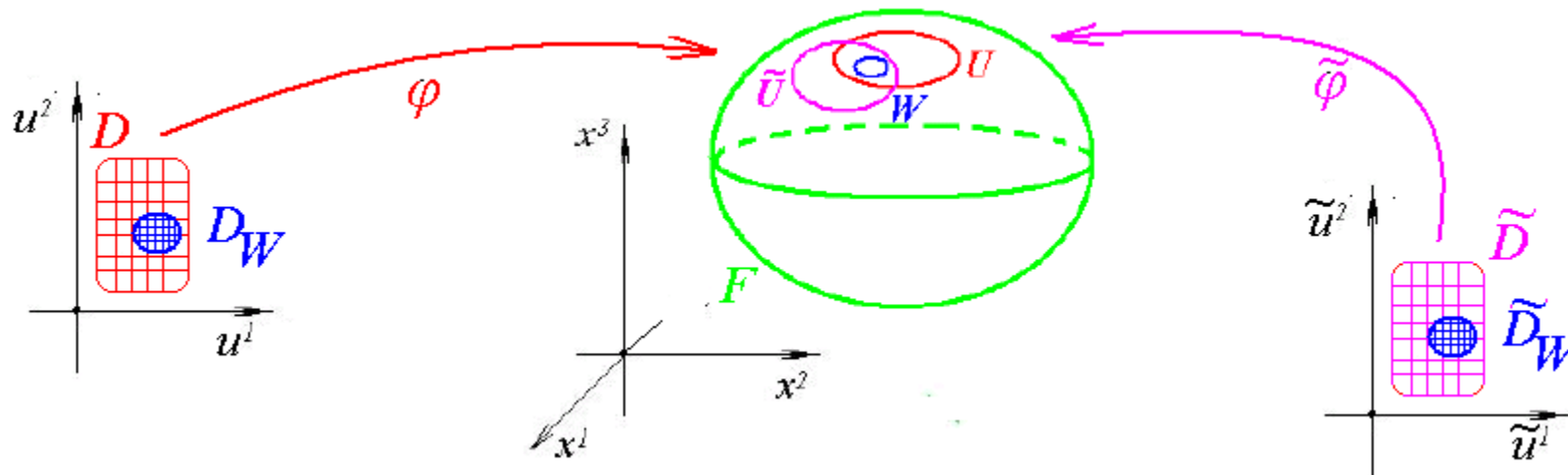
Проста поверхня F покривається сукупністю карт, які утворюють атлас.

Можлива ситуація, коли якась пара U і \tilde{U} карт перетинаються.

Візьмемо точку $P \in U \cap \tilde{U}$ і розглянемо якийсь її окіл $W \in U \cap \tilde{U}$.

В околі W діють одночасно дві системи локальних координат (u^1, u^2) і $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, породжені гомеоморфізмами $\varphi: D \rightarrow U$ і $\tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{U}$ відповідно.





Візьмемо прообрази D_W і \tilde{D}_W околу W відносно відображень $\varphi: D \rightarrow U$ і $\varphi: \tilde{D} \rightarrow \tilde{U}$ відповідно і розглянемо відображення $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{D}_W \rightarrow D_W$. Це відображення є гомеоморфізмом. Воно називається заміною локальних координат на поверхні F і представляється у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Визначення. Заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

назвемо *регулярною*, якщо

1) функції $u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in C^m$, $m \geq 1$;

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

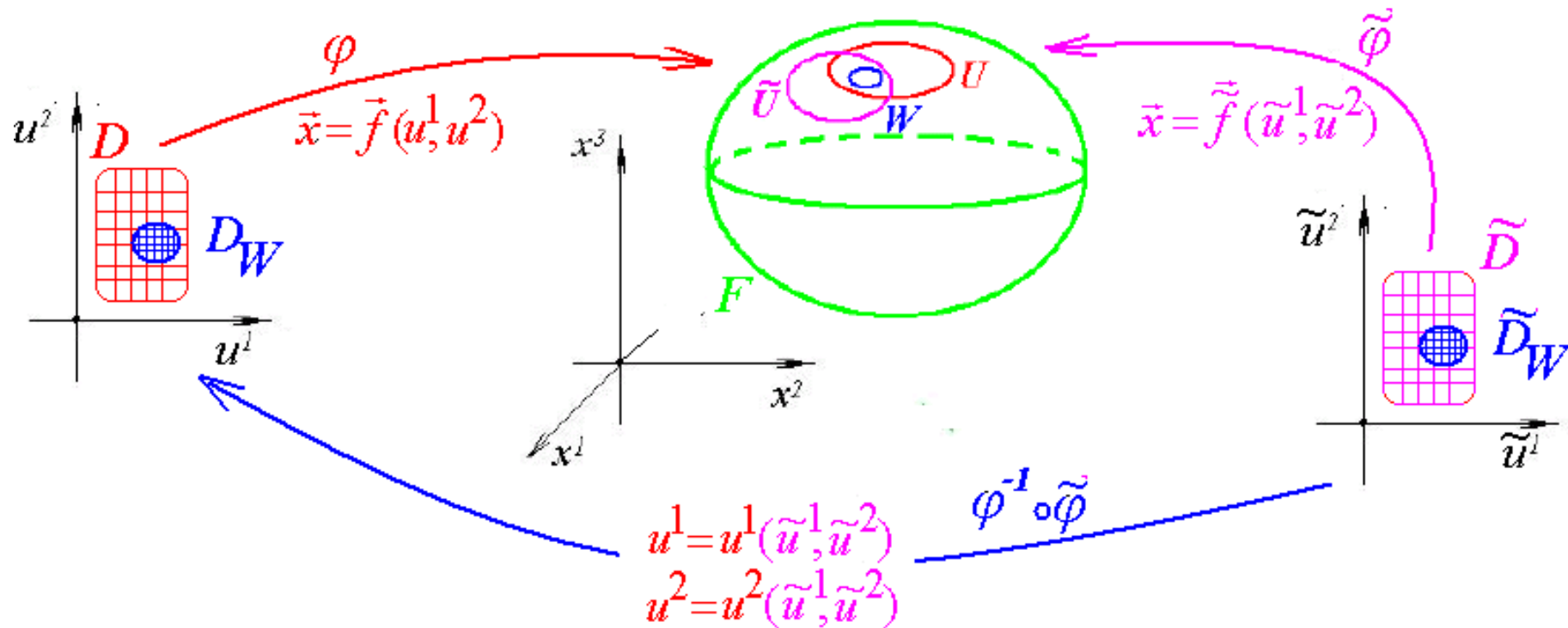
Зауваження. Регулярність є достатньою (але не необхідною) умовою, що забезпечує гомеоморфність відображення заміни координат.

В точках області W поверхня F представляється вектор-функціями

$$\bar{x} = \vec{f}(u^1, u^2) \text{ і } \bar{x} = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2),$$

при цьому маємо

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$



Продиференціюємо

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \end{aligned}$$

тобто,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Наслідок. Якщо вектор-функція $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ задовольняє умовам регулярності

$$(a) \vec{f} \in C^m, m \geq 1, \quad (b) \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \neq \vec{0},$$

а заміна координат $\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$ задовольняє умовам регулярності

$$(a) u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in C^m, m \geq 1; \quad (b) \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то тоді вектор-функція задовольняє умовам регулярності

$$(a) \vec{f} \in C^m, m \geq 1, \quad (b) \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \right] \neq \vec{0}$$

Доведення: Застосувати і довести

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^2} \right] = \left(\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \right) \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right]$$

Висновок. Одна й та ж поверхня може задаватись параметрично різними вектор-функціями. Тобто, на одній і тій же поверхні можна вводити різні параметризації (різні локальні системи координат).

При цьому регулярність параметрично заданої поверхні зберігається при регулярних замінах локальних координат.

Зауваження. Для кривих була виділена спеціальна параметризація – натуральний параметр.

Для поверхонь такої виділеної спеціальної системи координат не існує. В кожному окремому випадку, для кожної задачі, обирається своя найбільш підходяща система локальних координат.

Приклад 1. Розглянемо лінійну вектор функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \quad (u^1, u^2) \in R^2$$

яка задає площину в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку з радіус-вектором \vec{c} і натягнута на пару векторів \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Регулярність цієї параметрично заданої

площини означає $\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори \vec{e}_1, \vec{e}_2 є лінійно

незалежними.

Зробимо лінійну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = a_1^1 \tilde{u}^1 + a_2^1 \tilde{u}^2 + a_0^1 \\ u^2 = a_1^2 \tilde{u}^1 + a_2^2 \tilde{u}^2 + a_0^2 \end{cases}, \quad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in R^2$$

Умова регулярності заміни координат:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{c} + \vec{e}_1(a_1^1\tilde{u}^1 + a_2^1\tilde{u}^2 + a_0^1) + \vec{e}_2(a_1^2\tilde{u}^1 + a_2^2\tilde{u}^2 + a_0^2) = \\ &= \vec{c} + a_0^1\vec{e}_1 + a_0^2\vec{e}_2 + (\vec{e}_1a_1^1 + \vec{e}_2a_1^2)\tilde{u}^1 + (\vec{e}_1a_2^1 + \vec{e}_2a_2^2)\tilde{u}^2 = \\ &= \vec{\tilde{c}} + \vec{\tilde{e}}_1\tilde{u}^1 + \vec{\tilde{e}}_2\tilde{u}^2\end{aligned}$$

Описана заміна координат на площині відповідає заміні базису в площині і заміні початкової точки.

Приклад 2. Розглянемо лінійну вектор функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

яка задає площину в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку з радіус-вектором \vec{c} і натягнута на пару векторів \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Регулярність цієї параметрично заданої

площини означає $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори \vec{e}_1, \vec{e}_2 є лінійно

незалежними.

Зробимо наступну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Умова регулярності заміни координат:

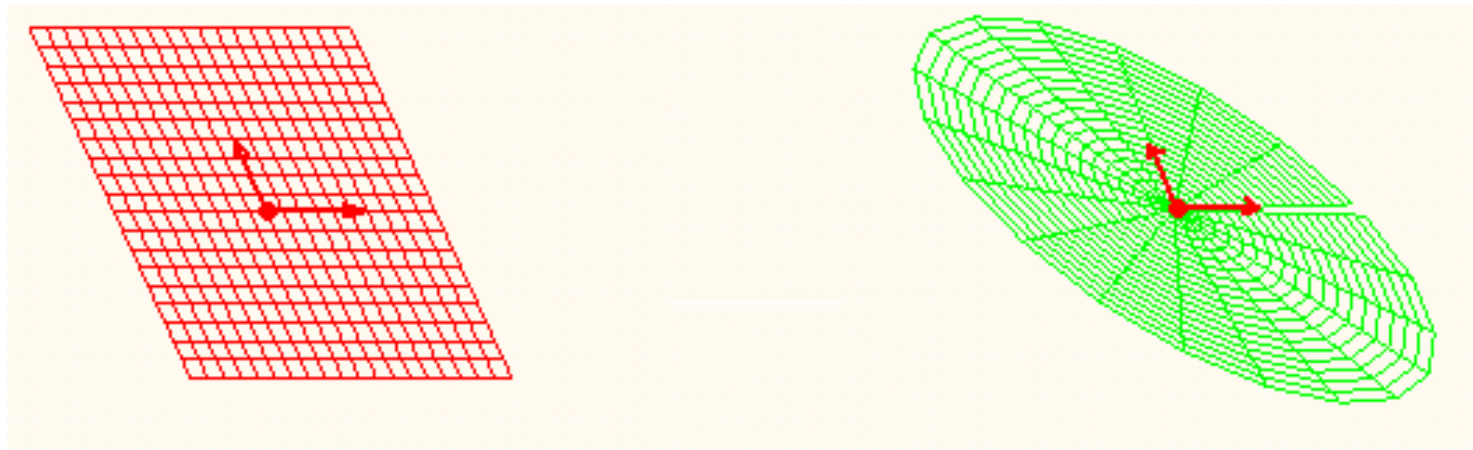
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \tilde{u}^2 & -\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \\ \sin \tilde{u}^2 & \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \end{vmatrix} = \tilde{u}^1 \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 + \vec{e}_2 \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2, \quad \begin{array}{l} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{array}$$

Описана заміна координат на площині відповідає переходу від «афінних» координат до «полярних» координат на площині.

Зауваження. Радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ в «полярних» координатах задає не всю площину, а площину з розрізом вздовж променя, що йде від початкової точки (полюса) в напрямку вектора \vec{e}_1 .



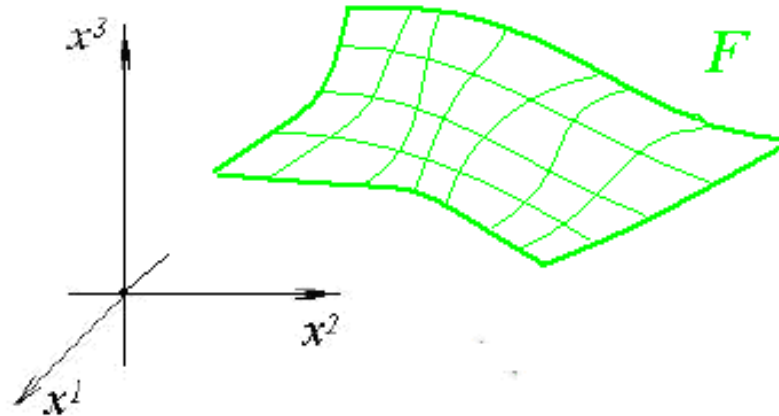
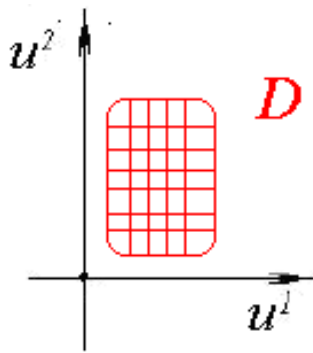
10.2. Криві на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D,$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D. \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$



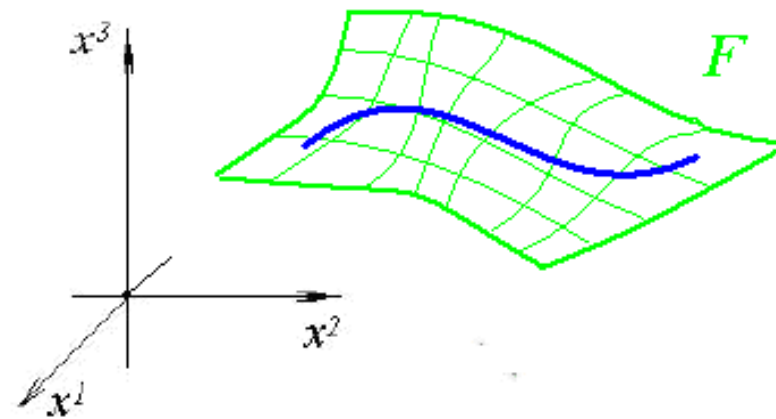
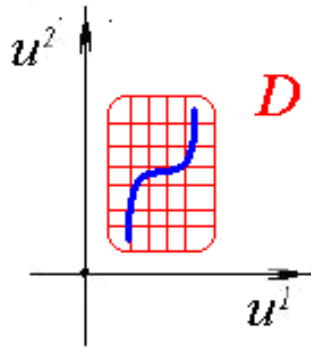
Розглянемо в області D площини параметрів (u^1, u^2) параметрично задану криву

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b)$$

Підставляючи в радіус-вектор поверхні $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, отримуємо вектор-функцію

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), t \in (a, b).$$

Ця вектор-функція задає криву γ в \mathbb{R}^3 , яка лежить на параметрично заданій поверхні F .



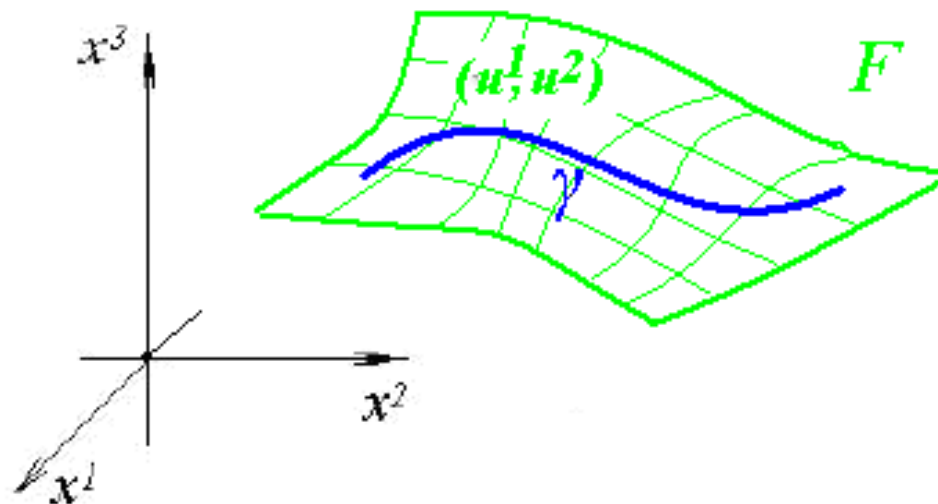
Таким чином, крива γ на поверхні F в \mathbb{R}^3 представляється в двох видах:

1) у внутрішніх координатах на поверхні F :

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b);$$

2) у зовнішніх координатах в просторі \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x^1 = f^1(h^1(t), h^2(t)) \\ x^2 = f^2(h^1(t), h^2(t)) \\ x^3 = f^3(h^1(t), h^2(t)) \end{cases}$$



Визначення. Криві, задані параметрично

$$\begin{cases} u^1 = \text{const} \\ u^2 = t \end{cases}, t \in (a_2, b_2), \quad \text{або} \quad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \text{const} \end{cases}, t \in (a_1, b_1);$$

називаються *координатними лініями* на параметрично заданій поверхні F .

Маємо два сімейства координатних ліній, які утворюють *координатну сітку* на параметрично заданій поверхні F .

Приклад. Розглянемо поверхню обертання, отриману обертанням плоскої кривої обертанням кривої γ

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1) \\ x^2 = 0 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases} \quad a < u^1 < b,$$

навколо осі x^3 . Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1) \cos u^2 \\ x^2 = r(u^1) \sin u^2 \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}, \quad a < u^1 < b, \quad 0 < u^2 < 2\pi.$$

Координатні лінії $\begin{cases} u^1 = C = \text{const} \\ u^2 = t \end{cases}$ задаються в обхопному просторі у ви-

гляді $\begin{cases} x^1 = r(C) \cos t \\ x^2 = r(C) \sin t \\ x^3 = h(C) \end{cases}, \quad 0 < t < 2\pi.$ Це горизонтальні кола, вони називаються *па-*

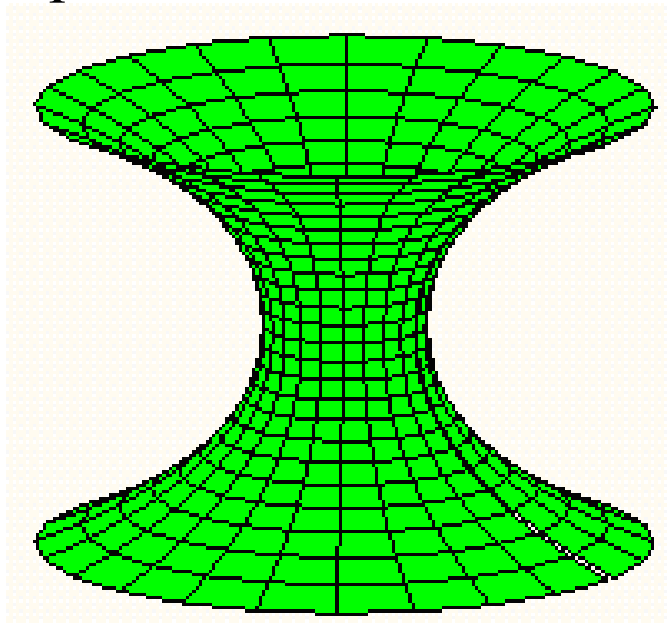
ралелями поверхні обертання.

Координатні лінії $\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = C = const \end{cases}$ задаються в об'ємному просторі у ви-

гляді $\begin{cases} x^1 = r(t) \cos C \\ x^2 = r(t) \sin C, a < t < b. \\ x^3 = h(t) \end{cases}$ Це початкова крива, повернута навколо осі x^3

на фіксований кут C . Такі криві називаються *меридіанами* поверхні обертання.

Таким чином, на поверхні обертання присутня спеціальна координатна сітка, утворена паралелями і меридіанами.



Розглянемо криву γ на поверхні F в \mathbb{R}^3 , представляється у внутрішніх координатах на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, t \in (a, b),$$

та радіус-вектором в \mathbb{R}^3 :

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), t \in (a, b),$$

тут $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ – радіус-вектор поверхні.

Продиференціювавши, отримаємо:
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial h^1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial h^2}{\partial t}.$$

Твердження. На регулярно параметризованій поверхні F в \mathbb{R}^3 регулярність кривої γ еквівалентна тому, що функції $h^1(t)$, $h^2(t)$ є неперервно диференційованими і при цьому $(\frac{dh^1}{dt}, \frac{dh^2}{dt}) \neq 0$.

Приклад. На регулярно параметризованій поверхні обертання координатні лінії є регулярними кривими.

10.3. Дотична площина поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D,$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

Розглянемо регулярну криву γ на поверхні F в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P . У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \quad t \in (a, b),$$

так, що

$$\begin{cases} u_0^1 = h^1(t_0) \\ u_0^2 = h^2(t_0) \end{cases}$$

при деякому t_0 .

Твердження. Дотична пряма кривої γ в точці P належить двомірній площині в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Доведення. Відразу зауважимо, що вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ є лінійно незалежними з огляду на регулярність параметрично заданої поверхні F . Тому вони однозначно визначають деяку площину Π в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку P і є натягнутою на $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Для напрямного вектора кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, напрямний вектор $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ кривої γ в точці P є лінійною комбінацією базисних векторів $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Як наслідок, дотична пряма кривої γ в точці P , яка проходить через точку P в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$, належить площині, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Твердження. Будь яка пряма, що проходить через точку P в площині, натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, є дотичною прямою для деякої регулярної кривої, що проходить через точку P , на поверхні F .

Доведення. Візьмемо довільну пряму L , що проходить через точку P , в площині Π , натягнутій на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$. Напрямний орт $\vec{\xi}$ цієї прямої L є лінійною комбінацією базисних векторів площини Π :

$$\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2$$

Розглянемо криву γ на поверхні F , що у внутрішніх локальних координатах задається у вигляді:

$$\begin{cases} u^1 = u_0^1 + \xi^1(t - t_0) \\ u^2 = u_0^2 + \xi^2(t - t_0) \end{cases}$$

Ця крива проходить через точку P .

Оскільки $\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

При цьому дотичний вектор цієї кривої в точці P має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial t}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2, \end{aligned}$$

тобто, $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) = \vec{\xi}$. Отже, пряма L співпадає з дотичною прямою побудованої кривої γ в точці P , що і вимагалось довести.

Висновок-визначення. Якщо на регулярній параметрично заданій поверхні F зафіксувати точку P і розглядати довільні регулярні криві, які лежать на поверхні F і проходять через точку P , то дотичні прямі таких кривих будуть утворювати двомірну площину

Ця площина називається *дотичною площиною* поверхні F в точці P і позначається $T_P F$.

Дотична площина проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Задача. Доведіть, що дотична площина визначена коректно – вона не змінюється при регулярних замінах локальних координат на поверхні F .

Задача. Обчисліть нормаль дотичної площини $T_P F$.

Задача. Запишіть рівняння дотичної площини $T_P F$.