

Варіант 1

Дана група Лі G , що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & y \\ \sin x & \cos x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики на G , знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці.
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 2

Дана група Лі $G = Sp(2, \mathbb{R}) = \{A \in Mat(2, \mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}$, де

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 3

Дана група Лі $G = U(2)$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 4

Дана група Лі G , що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & y \\ 0 & e^x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 5

Дана група Лі $G = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 6

Дана група Лі $G = O(2, 1)$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 7

Дана група Лі G , що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 8

Дана група Лі G , що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 9

Дана група Лі $G = SO(3) \times \mathbb{R}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 10

Дана група Лі G , що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i & 0 \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i & 0 \\ 0 & 0 & e^\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G (підказка: використати опис групи $SU(2)$).
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 11

Дана група Лі $G = Sp(1) = Sp(2, \mathbb{C}) \cap U(2)$, де $Sp(2, \mathbb{C}) = \{A \in Mat(2, \mathbb{C}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}$ і

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 12

Дана група Лі $G = SU(1, 1) = \{A \in Mat(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T I_{1,1} A = I_{1,1} \wedge \det A = 1\}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 13

Дана група Лі $G = U(2) \times \mathbb{R}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G (підказка: використати опис групи $SU(2)$).
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 14

Дана група Лі $G = U(1, 1) = \{A \in Mat(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T I_{1,1} A = I_{1,1}\}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.

Варіант 15

Дана група Лі $G = O(2, 1) \times \mathbb{R}$.

- Знайти алгебру Лі \mathfrak{g} групи G .
- Обрати деякий базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ у \mathfrak{g} та знайти структурні константи \mathfrak{g} у цьому базисі.
- Вважаючи лівоінваріантні векторні поля $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, що відповідають $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, ортонормованим базисом деякої лівоінваріантної метрики, знайти коваріантні похідні $\nabla_{X_1} X_3$ у рімановій зв'язності, що відповідає цій метриці лівоінваріантній метриці на G .
- Знайти секційну кривину $K(X_1, X_2)$ лівоінваріантної метрики з попередньої задачі.