Задача 0.1. Обчисліть натуральний параметр, кривину і скрут кривої в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є гладкою класу C^{∞}.

Обчислимо першу похідну радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2at + b \end{pmatrix}$$

Маємо: $$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + (2at + b)^2}$$

Оскільки $\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \neq 0$, крива є регулярною.

Обчислимо другу та третю похідні радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2at+b \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2a \end{pmatrix}, \quad \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|^2 = |\frac{d\vec{f}}{dt}|^2 \, |\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}|^2 - <\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}>^2 = 4(1+a^2+b^2)$$

$$(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \\ 2at+b & 2a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Обчислюємо натуральний параметр:

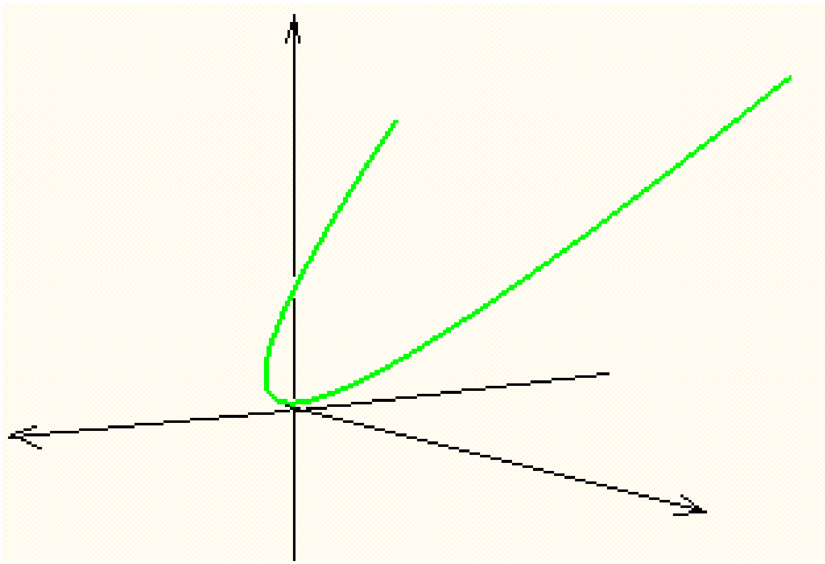
$$s = \int_0^t |\frac{d\vec{f}}{dt}| \, dt = \int_0^t \sqrt{1+4t^2+(2at+b)^2} \, dt$$

Обчислюємо кривину і скрут в точці $P(t=0)$:

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{2\sqrt{1+a^2+b^2}}{(\sqrt{1+4t^2+(2at+b)^2})^3}$$

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2} = \frac{0}{4(1+a^2+b^2)} \equiv 0$$

Відповідь: $s = \int\limits_0^t \sqrt{1+4t^2+(2at+b)^2}\,dt$, $k = \dfrac{2\sqrt{1+a^2+b^2}}{(\sqrt{1+4t^2+(2at+b)^2})^3}$, $\kappa \equiv 0$



Задача 0.2. Доведіть, що крива в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 1+3t+2t^2 \\ 2-2t+5t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

є плоскою. Знайдіть площину в $I\!R^3$, якій належить крива.

Розв'язання. Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є гладкою класу C^{∞}.

Обчислимо похідні радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 4t+3 \\ 10t-2 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{120t^2 - 16t + 13} \neq 0,$$

значить, крива є регулярною.

Далі,

$$|[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|^2=|\frac{d\vec{f}}{dt}|^2|\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}|^2-<\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}>^2=1496,$$

значить, на кривій немає точок перегину.

Нарешті,

$$(\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3})=\begin{vmatrix}4t+3 & 4 & 0\\ 10t-2 & 10 & 0\\ -2t & -2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

значить, крива має нульовий скрут.

Тому можемо зробити висновок, що крива γ є плоскою.

Щоб знайти площину *П*, якій належить крива γ, згадаємо, що усі щільнодотичні площини плоскої кривої співпадають з площиною *П*. Тому, можемо взяти довільну точку *P* на кривій γ, наприклад – точку *P(t=0)*, і обчислити щільнодотичну площину кривої γ в цій точці.

Маємо:

$$\vec{f}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \frac{d\vec{f}}{dt}(0)=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0)=\begin{pmatrix}4\\10\\-2\end{pmatrix}$$

Рівняння щільнодотичної площини в точці P:

$$\begin{vmatrix}x^1-1 & 3 & 4\\ x^2-2 & -2 & 10\\ x^3-1 & 0 & -2\end{vmatrix}=0,$$

тобто, $2x^1+3x^2+19x^3-27=0$.

Відповідь: $2x^1+3x^2+19x^3-27=0$.

Альтернативний метод: знайти коефіцієнти A,B,C,D так, що

$$A(1+3t+2t^2)+B(2-2t+5t^2)+C(1-t^2)+D=0$$

$$t^2(2A+5B-C)+t\,(3A-2B)+(A+2B+C+D)=0$$

$$2A+5B-C=0,\quad 3A-2B=0,\quad A+2B+C+D=0$$

Задача 0.3.1. Запишіть натуральне рівняння дуги циклоїди

$$\begin{cases} x^1 = a(t - \sin t) \\ x^2 = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

Розв'язання. Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є гладкою класу C^{∞}.

Обчислимо похідні радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} a \sin t) \\ a \cos t \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a \sin \frac{t}{2} \neq 0,$$

значить, крива є регулярною.

Обчислюємо натуральний параметр:

$$s = \int_0^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = 2a \int_0^t \sin \frac{t}{2}\, dt = 4a(1 - \cos \frac{t}{2}) = 8a \sin^2 \frac{t}{4}$$

Обчислюємо кривину:

$$k^* = \frac{\begin{vmatrix} a(1-\cos t) & a\sin t) \\ a\sin t & a\cos t \end{vmatrix}}{(2a\sin\frac{t}{2})^3} = -\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}$$

Натуральне рівняння:

$$\begin{cases} s = 8a\sin^2\frac{t}{4} \\ k^* = -\dfrac{1}{4a\sin\frac{t}{2}} \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

або,

$$k^* = -\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{8a-s}}, \quad s \in [0, 8a]$$

Відповідь: $k^* = -\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt{8a-s}}, \quad s \in [0, 8a]$

Задача 0.3.2. Запишіть натуральне рівняння логарифмічної спіралі

$$\begin{cases} x^1 = e^{at}\cos t \\ x^2 = e^{at}\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

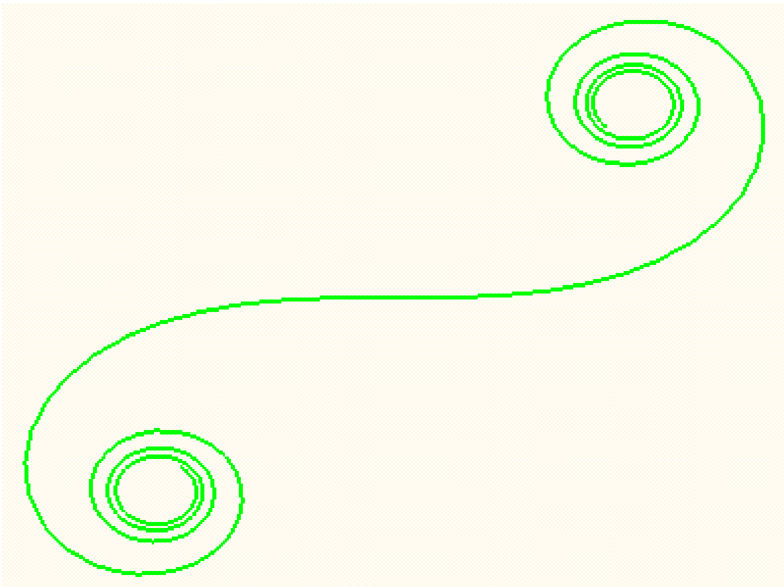
Відповідь: $\begin{cases} s = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{at}-1) \\ k^* = \dfrac{1}{e^{at}\sqrt{1+a^2}} \end{cases}$, тобто, $k^* = \dfrac{1}{as + \sqrt{1+a^2}}$

Задача 0.4.1. Відновіть криву в $I\!R^2$, задану натуральним рівнянням $k^* \equiv as+b$

*Розв'язання***.**

1) $$\frac{d\alpha}{ds} = as + b \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \int_0^s (as+b)ds + \alpha_0 = \frac{1}{2}(as+b)^2 + \tilde{\alpha}_0$$

2) $$\begin{cases} x' = \cos(\frac{1}{2}(as+b)^2 + \tilde{\alpha}_0) \\ y' = \sin(\frac{1}{2}(as+b)^2 + \tilde{\alpha}_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int_0^s \cos(\frac{1}{2}(as+b)^2 + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^1 \\ y = \int_0^s \sin(\frac{1}{2}(as+b)^2 + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^2 \end{cases}$$

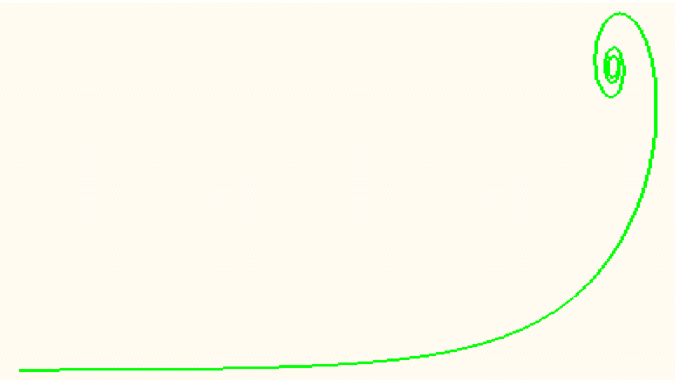


Задача 0.4.2. Відновіть криву в $I\!R^2$, задану натуральним рівнянням $k^* \equiv e^s$

*Розв'язання***.**

1) $\dfrac{d\alpha}{ds} = e^s \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int\limits_0^s e^s ds + \alpha_0 = e^s + \tilde{\alpha}_0$

2) $\begin{cases} x' = \cos(e^s + \tilde{\alpha}_0) \\ y' = \sin(e^s + \tilde{\alpha}_0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \int\limits_0^s \cos(e^s + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^1 \\ y = \int\limits_0^s \sin(e^s + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^2 \end{cases}$



Зауваження

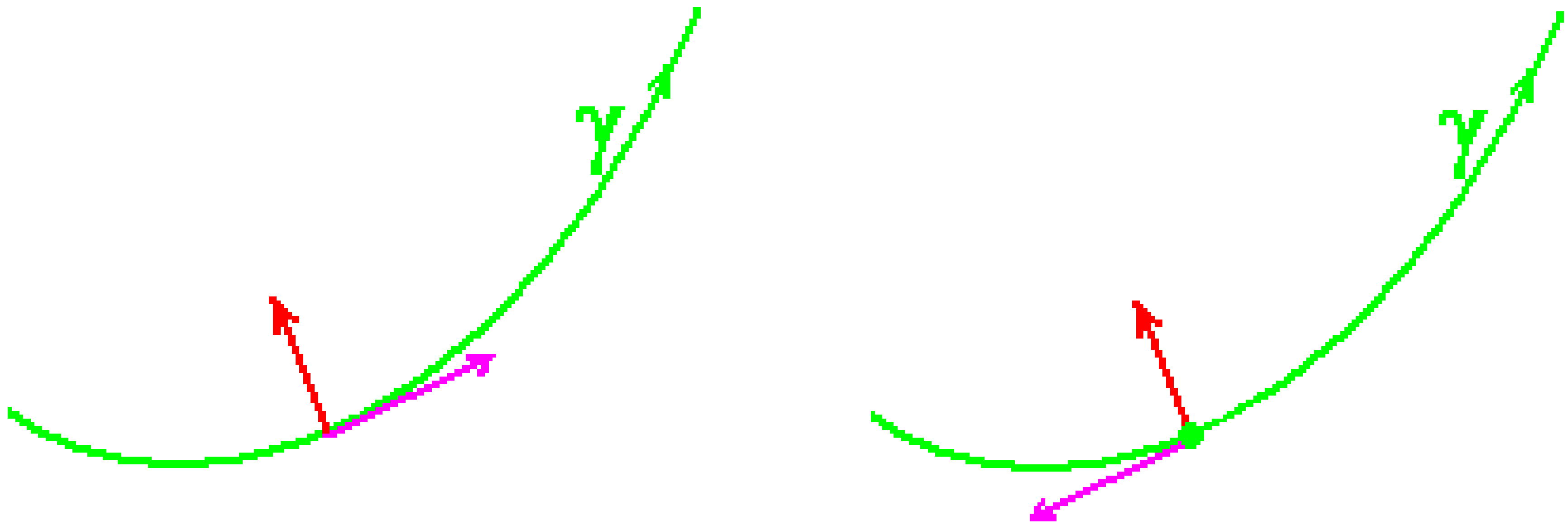
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^s \cos(\alpha(s)+\alpha_0)\,ds \\ \int\limits_0^s \sin(\alpha(s)+\alpha_0)\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_0^s (\cos\alpha(s)\cos\alpha_0 - \sin\alpha(s)\sin\alpha_0)\,ds \\ \int\limits_0^s (\sin\alpha(s)\cos\alpha_0 + \cos\alpha(s)\sin\alpha_0)\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \int\limits_0^s \cos\alpha(s)\,ds - \sin\alpha_0 \int\limits_0^s \sin\alpha(s)\,ds \\ \sin\alpha_0 \int\limits_0^s \cos\alpha(s)\,ds + \cos\alpha_0 \int\limits_0^s \sin\alpha(s)\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{pmatrix} =$$

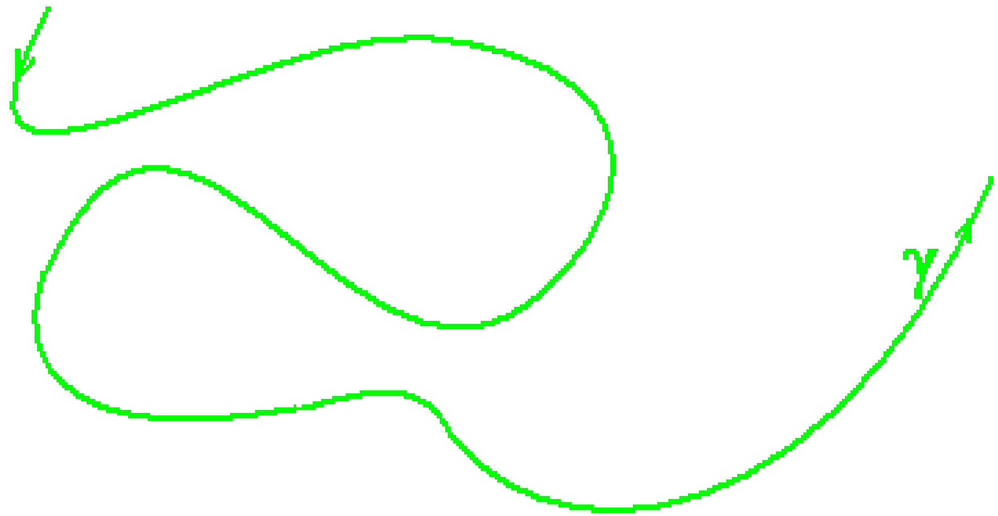
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int\limits_0^s \cos\alpha(s)\,ds \\ \int\limits_0^s \sin\alpha(s)\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{pmatrix}$$

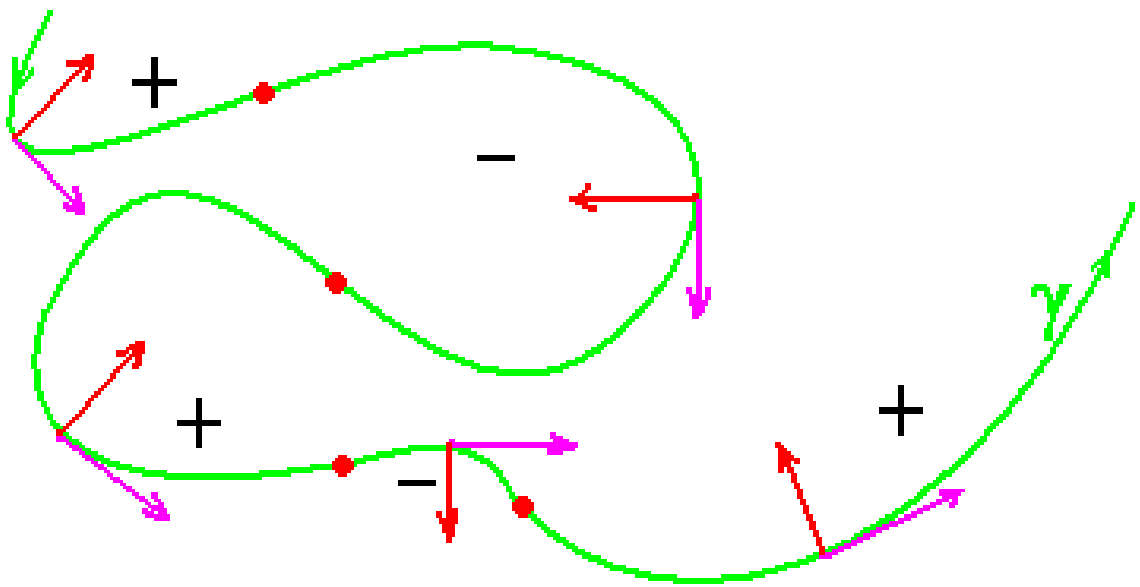
Задача 0.5. Як зміниться кривина зі знаком k^* параметрично заданої кривої в площині $\mathbb{R}^2$, якщо змінити орієнтацію (напрям руху) на кривій?



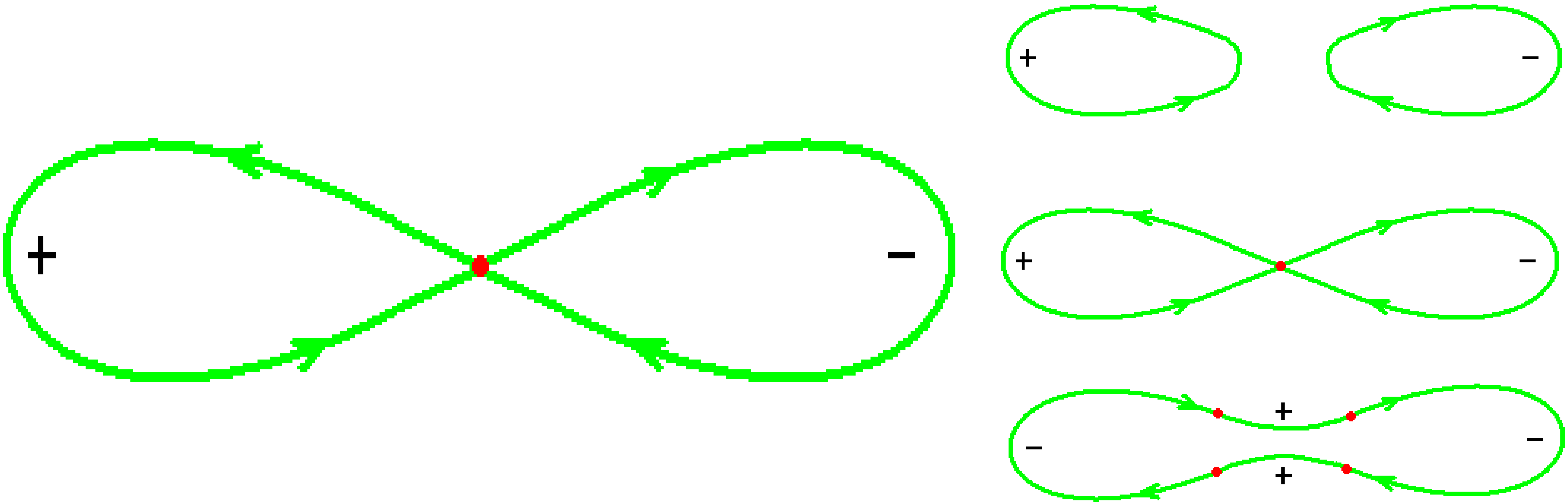
При заміні орієнтації на кривій її кривина зі знаком k^* змінить знак на протилежний.

Задача 0.6.1. Для зображеної на малюнку кривої в площині $\mathbb{R}^2$ вкажіть (приблизно) точки перегину і проаналізуйте знак кривини зі знаком k^* на різних частинах кривої





Задача 0.6.2. Не проводячи обчислень, зобразіть лемніскату Бернулі в $\mathbb{R}^2$, вкажіть (приблизно) точки перегину і проаналізуйте знак кривини зі знаком k^* на різних частинах лемніскати Бернулі.



1. Еволюта

Задача. Побудуйте еволюту кривої γ в $I\!R^2$, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^3 \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо крива γ в $I\!R^2$ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \end{cases},$$

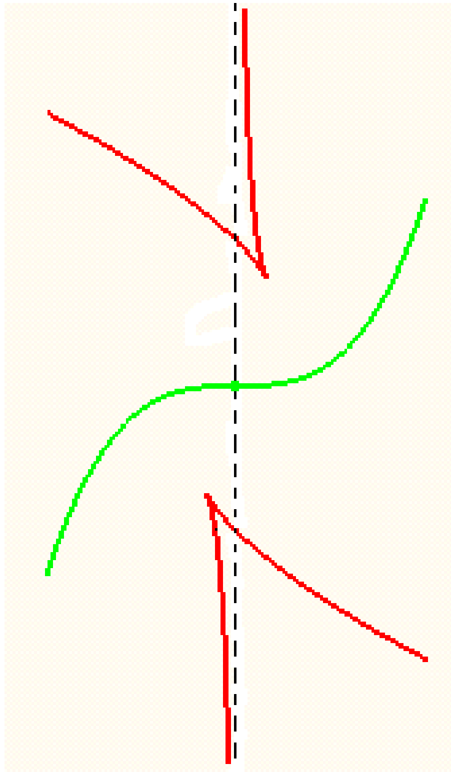
то її еволюта задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1 - \dfrac{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}{\frac{df^1}{dt}\frac{d^2 f^2}{dt^2} - \frac{d^2 f^1}{dt^2}\frac{df^1}{dt}} \cdot \dfrac{df^2}{dt} \\[2ex] x^2 = f^2 + \dfrac{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}{\frac{df^1}{dt}\frac{d^2 f^2}{dt^2} - \frac{d^2 f^1}{dt^2}\frac{df^1}{dt}} \cdot \dfrac{df^1}{dt} \end{cases}$$

Запишемо параметричне рівняння еволюти для заданої кривої:

$$\begin{cases} x^1 = t - \dfrac{1+9t^4}{6t}\cdot 3t^2 = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{9}{2}t^5 \\ x^2 = t^3 + \dfrac{1+9t^4}{6t}\cdot 1 = \dfrac{1}{6t} + \dfrac{5}{2}t^3 \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{9}{2}t^5 \\ x^2 = \dfrac{1}{6t} + \dfrac{5}{2}t^3 \end{cases}$



Намалюйте напрямок руху на кривій γ і на її еволюті γ°

Гіпотеза. Якщо на кривій γ є точка перегину A, то нормальна пряма кривої γ в точці перегину є асимптотичною прямою для еволюти γ° кривої γ.

Ідея розв'язання. Записати рівняння відповідної прямої, порахувати відстань від довільної точки кривої γ° до прямої, проаналізувати поведінку цієї відстані коли точка на кривій наближується до точки перегину A.

2. Евольвента

Задача. Побудуйте евольвенту кривої γ в $\mathbb{R}^2$, заданої параметрично

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ: $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Обчислимо похідну: $\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

Найдемо одиничний дотичний вектор:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|}\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

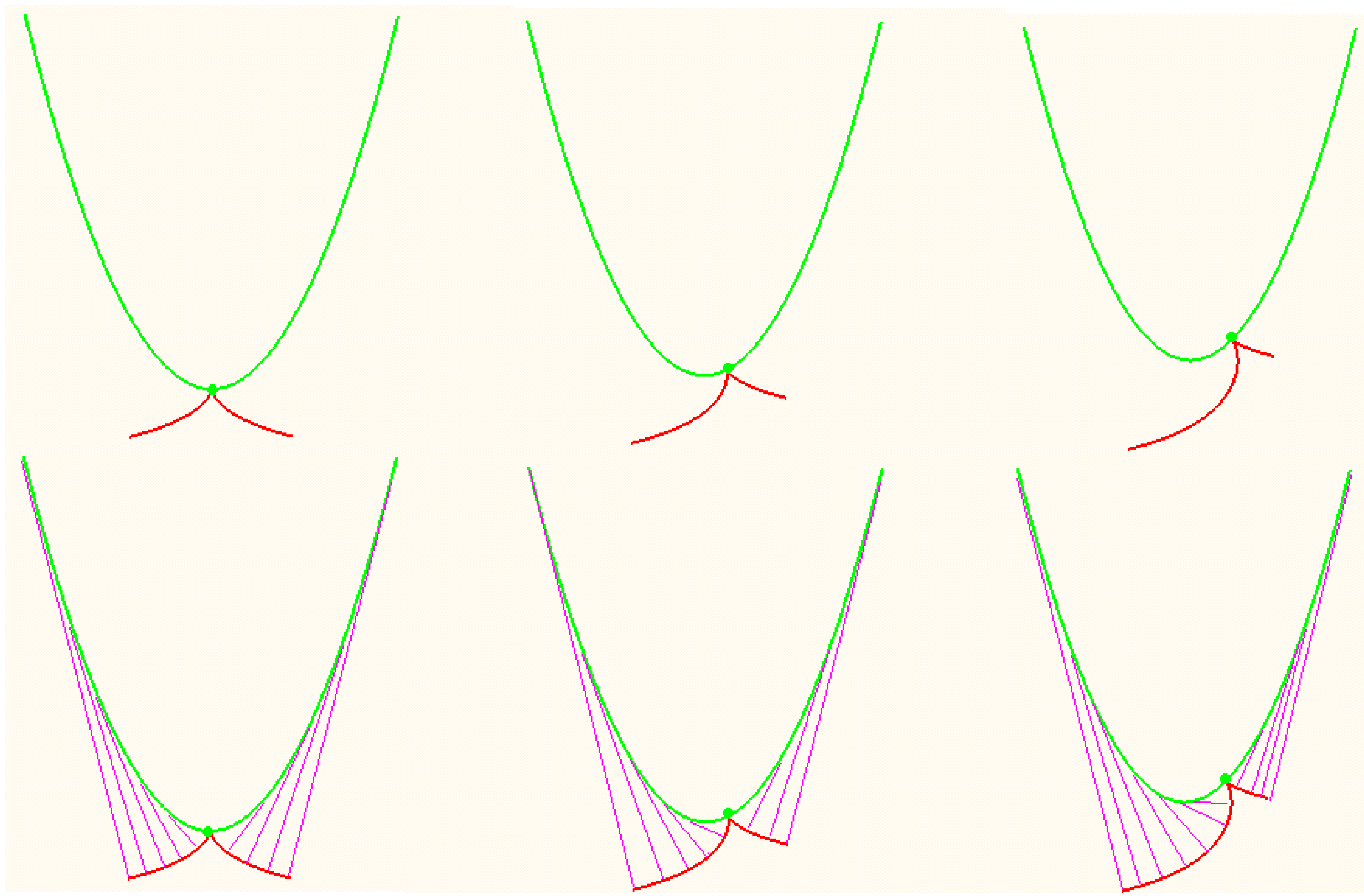
Найдемо натуральний параметр на кривій γ:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h\,2t - \frac{t_0}{2}\sqrt{1+4t_0{}^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h\,2t_0$$

Запишемо радіус-вектор евольвенти:

$$\vec{f}^{\bullet} = \vec{f} - s\vec{\tau} =$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} - \frac{\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h\,2t - \frac{t_0}{2}\sqrt{1+4t_0{}^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h\,2t_0}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$



3. Обгортка сім'ї плоских кривих

Нехай здано однопараметричну сім'ю плоских кривих: $F(x^1, x^2; a) = 0$

Обгортка $Г$ цієї сім'ї визначається як крива

$$\begin{cases} x^1 = f^1(a) \\ x^2 = f^2(a) \end{cases},$$

яка в кожній свої точці дотикається відповідної кривої сім'ї:

$$\begin{cases} F(f^1(a), f^2(a), a) \equiv 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^1}\dfrac{df^1}{da} + \dfrac{\partial F}{\partial x^2}\dfrac{df^2}{da} \equiv 0 \end{cases}$$

Якщо продиференціювати першу тотожність по a:

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{df^1}{da} + \frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{df^2}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} \equiv 0$$

то отримаємо наступну систему для знаходження обгортки:

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases}$$

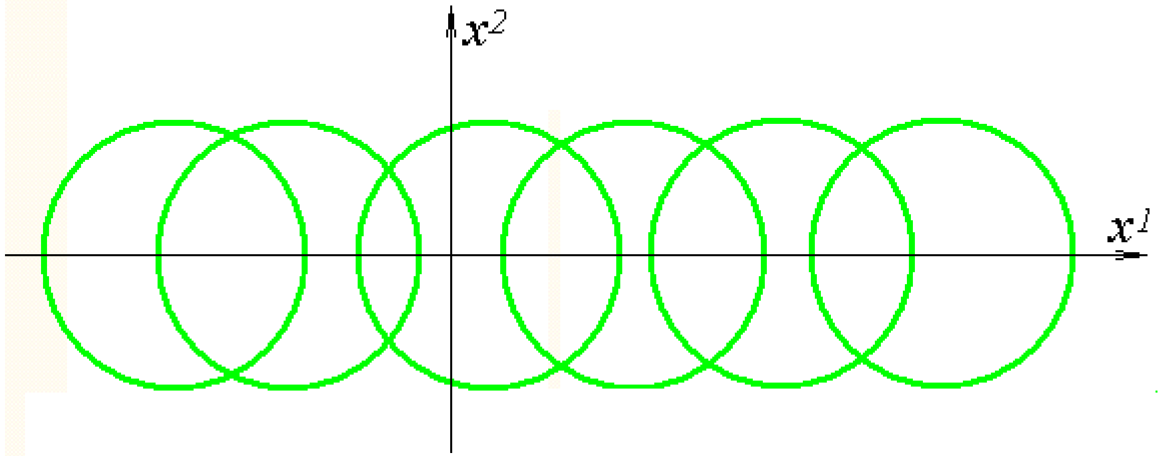
Задача 3. Задано одно параметричну сім'ю плоских кривих:

$$(x^1 - a)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad -\infty < a < \infty$$

З яких кривих утворена задана сім'я?

Знайдіть обгортку заданої сім'ї кривих.

Розв'язання. Задана сім'я утворена колами радіуса 1, центри яких розташовані на горизонтальній координатній прямій.



Підставимо $F(x^1, x^2, a) = (x^1 - a)^2 + (x^2)^2 - 1$ в систему

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^1 - a)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 \\ 2(x^1 - a) = 0 \end{cases}$$

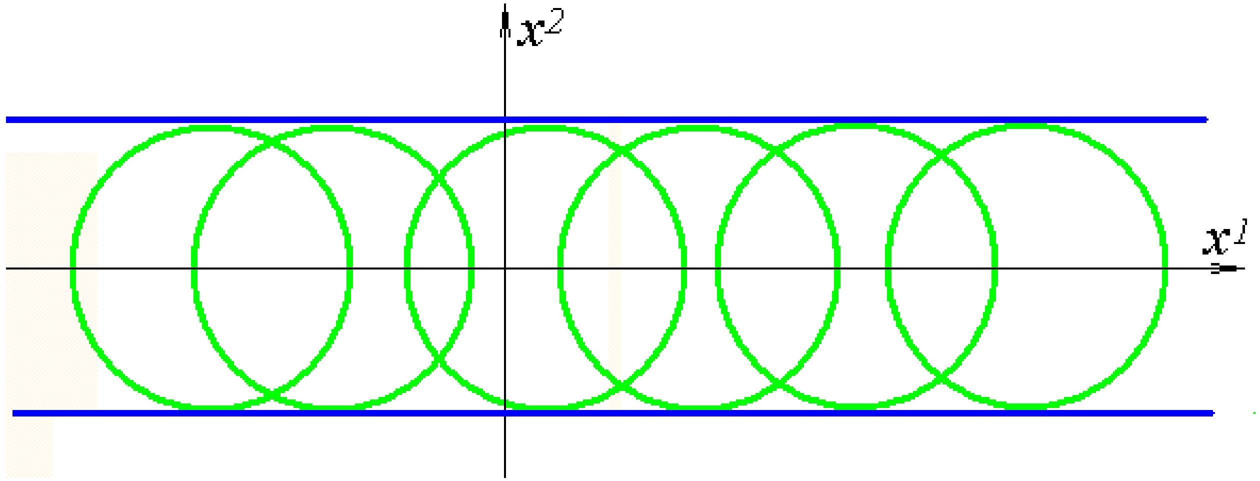
Знаходимо розв’язок системи

$$\begin{cases} (x^1 - a)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 \\ 2(x^1 - a) = 0 \end{cases},$$

отримуємо

$$\begin{cases} x^1 = a \\ x^2 = \pm 1 \end{cases}$$

Отже, обгортка складається з двох горизонтальних прямих



Відповідь: $\begin{cases} x^1 = a \\ x^2 = \pm 1 \end{cases}$

Література: В.А. Залгаллер *Теория огибающих*

Задача 9.1c. Знайдемо натуральне рівняння пласкої кривої

$$x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$$

з задачі 6.1c. Тут будемо вважати $a > 0$. Нагадаємо, що натуральні рівняння – це вираження кривини та скруту кривої через натуральний параметр. Для пласкої кривої скрут нульовий, тому нам залишається виразити кривину. Почнемо з переходу до натурального параметра: крива задається вектор-функцією

$$r = a(\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t),$$

тому

$$r' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t,\ \cos t - \cos t + t\sin t) = at(\cos t,\ \sin t),$$
$$|r'| = \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2} = a|t|.$$

Натуральний параметр s – це орієнтована довжина дуги кривої від точки, що відповідає фіксованому значенню параметра $t = t_0$. Тоді

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |r'(\tau)|\, d\tau = a\int_{t_0}^{t} |\tau|\, d\tau.$$

Візьмемо для зручності $t_0 = 0$, тоді при $t \geqslant 0$ це буде

$$s(t) = a\int_0^t \tau\, d\tau = a\frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^t = \frac{a\,t^2}{2},$$

а при $t \leqslant 0$ –

$$s(t) = -a\int_0^t \tau\, d\tau = -a\frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^t = -\frac{a\,t^2}{2},$$

і в будь-якому разі

$$|t| = \frac{\sqrt{2a|s|}}{a}.$$

З іншого боку,

$$r'' = a(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t),$$

тому за формулою для кривини пласкої кривої

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{|r'|^3} = \frac{a^2(t\cos t(\sin t + t\cos t) - (\cos t - t\sin t)t\sin t)}{a^3|t|^3} = \frac{t^2}{a|t|^3} = \frac{1}{a|t|}.$$

Таким чином, натуральним рівнянням нашої кривої є

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{2a|s|}}.$$

Згадаємо, що величина, що обернена до кривини (яка у цієї кривої у всіх точках ненульова), зветься радіусом кривини. Це з точністю до знака радіус щільнодотичного кола у відповідній точці кривої. Ми його будемо зазвичай позначати літерою R. Тому натуральне рівняння можна також записати в вигляді

$$R(s) = \sqrt{2a|s|}.$$

Часто у таких випадках прибирають корінь, переписуючи рівняння у формі

$$R^2 = 2a|s|.$$

Зауважимо, що тут $s = 0$ (що відповідає $t = 0$) є точкою порушення регулярності (особливою), у якій $r' = 0$. Тому її можна виключити з області визначення і обмежитися, скажімо, проміжком $(0, +\infty)$. У цьому випадку модуль з попереднього рівняння зникне. Щоправда, інтеграл який ми використовували при обчисленні натурального параметра, формально перетвориться на невласний, але на його значення це не вплине.

Задача 9.1а. Знайдемо натуральне рівняння явно заданої плаской кривої

$$y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}.$$

Зауважимо, що тут областю визначення буде $[0, +\infty)$. Як завжди, інтерпретуємо явно задану криву як параметричну:

$$r = (x, f),\ r' = (1, f'),\ |r'| = \sqrt{1 + f'^2}.$$

У нас, таким чином,

$$|r'| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}.$$

Візьмемо за натуральний параметр s орієнтовану довжину дуги кривої від точки з абсцисою x_0:

$$s(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{9}{4}\xi}\, d\xi = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}\xi\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4}x_0\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Для спрощення подальших перетворень умовно покладемо $x_0 = -\frac{4}{9}$. Хоча це значення і не належить до області визначення, так робити можна: таким чином ми просто додаємо константу до натурального параметра. Отже,

$$s = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$s^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{4}x\right),$$

$$x = s^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}.$$

Зауважимо, що область визначення тепер має вигляд $s \in \left[\frac{8}{27}, +\infty\right)$. Таким чином, натуральною параметризацією нашої кривої є

$$r(s) = \left(s^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}, \left(s^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

тож для неї

$$r' = \left(\frac{2}{3}s^{-\frac{1}{3}}, \frac{3}{2}\left(s^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}s^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}s^{-\frac{1}{3}}, \left(1 - \frac{4}{9}s^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

(неважко побачити, що тепер $|r'| = 1$), і

$$r'' = \left(-\frac{2}{9}s^{-\frac{4}{3}}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{9}s^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)s^{-\frac{5}{3}}\right).$$

За спрощеною формулою для кривини маємо

$$k = x'y'' - x''y' = \frac{8}{81}\left(1 - \frac{4}{9}s^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}s^{-2} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{4}{9}s^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2}{9}\left(1 - \frac{4}{9}s^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}s^{-2} + s^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{9}s^{-2}\right) = \frac{2}{3}\left(9 - 4s^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3s\sqrt{9s^{\frac{2}{3}} - 4}}$$

Той же результат ми б отримали, якщо б у формулу для кривини явно заданої кривої $k = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^3}$ підставили б нашу параметризацію (перевірте це). Це рівняння також можна переписати, підводячи у степені та використовуючи радіус кривини $R = \frac{1}{k}$:

$$4R^2 = 9s^2\left(9s^{\frac{2}{3}} - 4\right),$$

$$4R^2 + 36s^2 = 81s^{\frac{8}{3}},$$

$$\left(4R^2 + 36s^2\right)^3 = 531441s^8.$$

Як бачимо, натуральні рівняння можуть мати досить різноманітний вигляд. Але цікавішою є задача відновлення плаской кривої за її натуральним рівнянням!

Задача 9.2. Основна теорема теорії кривих стверджує, що будь-яка просторова (зокрема, пласка) крива визначається своїми натуральними рівняннями з точністю до руху простору або площини. Розберемо детальніше, як це працює у випадку пласких кривих, розглянувши загальне натуральне рівняння вигляду

$$k = k(s).$$

Згадаємо з матеріалу лекції (ми також перевіримо це нижче), що орієнтована кривина пласкої кривої задовольняє умові $k = \alpha'$, де $\alpha = \alpha(s)$ – орієнтований кут від фіксованого напрямку до дотичного вектора кривої, а похідна береться за натуральним параметром. У якості цього фіксованого напрямку ми будемо брати, як це зазвичай робиться, напрямок осі Ox. Таким чином, α можна знайти, інтегруючи k:

$$\alpha(s) = \int\limits_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma + \alpha_0, \tag{1}$$

де s_0 – деяке початкове значення натурального параметра, а $\alpha_0 = \alpha(s_0)$ – значення кута у відповідній точці. Далі, за означенням α маємо, що одиничний дотичний вектор цієї кривої дорівнює

$$(x', y') = r' = \tau = (\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{2}$$

(нагадуємо, що параметр натуральний). Інтегруючи цю рівність, отримаємо

$$\begin{aligned} x(s) &= \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha(\sigma)\, d\sigma + x_0, \\ y(s) &= \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha(\sigma)\, d\sigma + y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

де $(x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0)) = r(s_0)$ – точка кривої, що відповідає s_0. Підставляючи у (3) функцію $\alpha(s)$ з (1), отримуємо потрібну криву. Перевіримо це. Нехай крива $r = (x, y)$ задана рівняннями (3). Диференціюючи цю вектор-функцію, отримаємо (2). Зокрема, з $|r'| = 1$ тоді випливає, що параметр s дійсно є натуральним. Продиференціюємо ще раз:

$$r'' = \tau' = (-\alpha' \sin\alpha, \alpha' \cos\alpha)$$

Тому кривина цієї натурально параметризованої кривої дорівнює

$$x'y'' - x''y' = \alpha' = k$$

в силу (1). З такого задання кривої також очевидним чином випливають формули Френе

$$\begin{cases} \tau' = k\nu \\ \nu' = -k\tau \end{cases},$$

де $\nu = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ – вектор нормалі, що разом з τ утворює додатно орієнтований репер Френе пласкої кривої.

Зауважимо також, що довільним чином обираючи початкову точку (x_0, y_0) і початковий кут α_0, ми якраз і визначаємо криву з точністю до руху площини.

Задача 9.3b. Застосуємо техніку з попередньої задачі, відновивши пласку криву за натуральним рівнянням

$$R = a\,s.$$

За означенням радіуса кривини, кривина дорівнює

$$k = \frac{1}{a\,s}.$$

Тут проміжок визначення кривої не повинен включати $s = 0$, далі вважаємо, що це $(0, +\infty)$. Отже, почнемо з (1):

$$\alpha = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{a\,\sigma}\,d\sigma + \alpha_0 = \frac{1}{a}\ln\sigma\Big|_{s_0}^{s} + \alpha_0.$$

Тут зручно обрати $s_0 = 1$. Таким чином,

$$\alpha = \frac{1}{a}\ln s + \alpha_0.$$

Формули (3) набувають вигляду

$$x = \int_1^s \cos\left(\tfrac{1}{a}\ln\sigma + \alpha_0\right)\,d\sigma + x_0,$$
$$y = \int_1^s \sin\left(\tfrac{1}{a}\ln\sigma + \alpha_0\right)\,d\sigma + y_0.$$

Така параметризація виглядає не дуже добре. Часто у задачах на відновлення кривої за натуральним рівнянням варто у якості параметра брати не s, а сам кут α. Зокрема, якщо $k \neq 0$ на проміжку визначення кривої (як у нашому випадку), то похідна $\alpha' = k$ всюди додатна або всюди від'ємна, тому α можна використовувати у якості параметра на всій області визначення. Отже, зробимо в інтегралах зверху заміну

$$\alpha = \frac{1}{a}\ln\sigma + \alpha_0,$$

таким чином,

$$\sigma = e^{a(\alpha-\alpha_0)},$$
$$d\sigma = a\,e^{a(\alpha-\alpha_0)}d\alpha,$$

і значенню $\alpha = \alpha_0$ відповідає $\sigma = 1$. Отже, крива має вигляд

$$x(\alpha) = a \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\alpha \, d\alpha + x_0,$$
$$y(\alpha) = a \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{a(\alpha-\alpha_0)} \sin\alpha \, d\alpha + y_0.$$

Зауважимо, що параметр α вже не є, взагалі кажучи, натуральним. Згадаємо, що такі інтеграли обчислюються за допомогою інтегрування частинами:

$$x - x_0 = a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \sin\alpha\Big|_{\alpha_0}^{\alpha} - a^2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{a(\alpha-\alpha_0)} \sin\alpha \, d\alpha = a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \sin\alpha - a\sin\alpha_0 - a(y - y_0),$$
$$y - y_0 = -a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\alpha\Big|_{\alpha_0}^{\alpha} + a^2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\alpha \, d\alpha = -a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\alpha + a\cos\alpha_0 + a(x - x_0).$$

Розв'язуючи отриману лінійну систему

$$\begin{cases} x - x_0 + a(y - y_0) = a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \sin\alpha - a\sin\alpha_0, \\ -a(x - x_0) + y - y_0 = -a\, e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\alpha + a\cos\alpha_0, \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} x - x_0 &= e^{a(\alpha-\alpha_0)} \tfrac{a}{1+a^2} \left(\sin\alpha + a\cos\alpha\right) - \tfrac{a}{1+a^2} \left(\sin\alpha_0 + a\cos\alpha_0\right), \\ y - y_0 &= e^{a(\alpha-\alpha_0)} \tfrac{a}{1+a^2} \left(a\sin\alpha - \cos\alpha\right) - \tfrac{a}{1+a^2} \left(a\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0\right). \end{aligned}$$

Якщо позначити через β_0 такий кут, що $\cos\beta_0 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, $\sin\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, то це можна переписати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} x &= e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\beta_0 \cos(\alpha - \beta_0) - \cos\beta_0 \cos(\alpha_0 - \beta_0) + x_0, \\ y &= e^{a(\alpha-\alpha_0)} \cos\beta_0 \sin(\alpha - \beta_0) - \cos\beta_0 \sin(\alpha_0 - \beta_0) + y_0. \end{aligned}$$

Тоді в полярній системі координат з початком у точці $(x_0 - \cos\beta_0\cos(\alpha_0 - \beta_0), y_0 - \cos\beta_0\sin(\alpha_0 - \beta_0))$ і віссю, що утворює з Ox кут β_0, ця крива має рівняння $\rho = \cos\beta_0 e^{a(\beta_0-\alpha_0)} e^{a\varphi}$ (де $\varphi = \alpha - \beta_0$ є кутовою координатою цієї полярної системи). Тому це логарифмічна спіраль (див. задачу 3.15).

Задача 9.4b. Тепер розглянемо "нестандартне" натуральне рівняння:

$$R = b\,\alpha.$$

В таких рівняннях α означає те ж саме, що і у попередніх задачах. Оскільки $R = \frac{1}{k}$ і $k = \alpha'$, це дає нам диференціальне рівняння

$$\frac{1}{\alpha'} = b\,\alpha$$

з невідомою функцією α від натурального параметра s. Ми могли б розв'язати його і підставити розв'язок у (3) (зробіть це), але, мотивуючись попередньою задачею, зробимо дещо інакше. Будемо шукати параметризацію кривої параметром α (зауважимо, що $\alpha' \neq 0$ випливає з умови). Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{ds}{d\alpha} = b\,\alpha,$$

$$ds = b\,\alpha\,d\alpha.$$

Тоді у (3) (тепер позначаючи внутрішній параметр інтегрування також через s), маємо

$$x = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha\,ds + x_0 = b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \alpha\cos\alpha\,d\alpha + x_0,$$
$$y = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha\,ds + y_0 = b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \alpha\sin\alpha\,d\alpha + y_0.$$

Знову інтегруємо частинами:

$$x - x_0 = b\,\alpha\sin\alpha\big|_{\alpha_0}^{\alpha} - b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \sin\alpha\,d\alpha = b\left(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\right)\big|_{\alpha_0}^{\alpha},$$
$$y - y_0 = -b\,\alpha\cos\alpha\big|_{\alpha_0}^{\alpha} + b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \cos\alpha\,d\alpha = b\left(-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\right)\big|_{\alpha_0}^{\alpha}.$$

Якщо покласти $\alpha_0 = 0$, $x_0 = b$ і $y_0 = 0$, то отримаємо криву

$$x = b\left(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\right),\ y = b\left(-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\right).$$

Це крива з задачі 9.1c (евольвента кола), хоча наше рівняння було не дуже схоже на отримане в тій задачі.

Задача 9.4c. Рівняння

$$s = b\,\mathrm{tg}\alpha$$

теж є різновидом натурального рівняння пласкої кривої, хоча і не містить явно кривину. З розв'язку попередньої задачі повинно вже бути зрозуміло, що з ним робити. Продиференціюємо:

$$ds = b\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

і підставимо це у (3), знова замінивши параметр на α:

$$x = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha\,ds + x_0 = b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{1}{\cos\alpha}d\alpha + x_0,$$
$$y = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha\,ds + y_0 = b\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha + y_0.$$

Перший з цих інтегралів нам уже зустрічався в задачі 6.2а. Також зауважимо, що $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha = -\frac{d\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$. Таким чином,

$$\begin{aligned} x &= b\ln\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)\Big|_{\alpha_0}^{\alpha} + x_0,\\ y &= \tfrac{b}{\cos\alpha}\Big|_{\alpha_0}^{\alpha} + y_0. \end{aligned}$$

Зокрема, для $\alpha_0 = 0$, $x_0 = 0$ і $y_0 = b$ отримаємо

$$x = b\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\ y = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Це одна з параметризацій ланцюгової лінії $y = b\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{b}$ (перевірте це), точніше, якогось її проміжку, на якому $\cos\alpha \neq 0$.