

$$\underline{5.} \quad \gamma(t) = \begin{cases} (1 + \cos t, 0, \sin t) & , t \in [0, \pi] \\ (0, 1 + \cos t, \sin t) & , t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (-\sin t, 0, \cos t) & , t \in [0, \pi) \\ (0, -\sin t, \cos t) & , t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad \gamma''(t) = \begin{cases} (-\cos t, 0, -\sin t) & \dots \\ (0, -\cos t, -\sin t) & \dots \end{cases}, \quad \gamma'''(t) = \begin{cases} (\sin t, 0, -\cos t) & \dots \\ (0, \sin t, -\cos t) & \dots \end{cases}$$

$$\gamma'(\pi-0) = (0, 0, -1) = \gamma'(\pi+0), \quad \gamma''(\pi-0) = (1, 0, 0) \neq (0, 1, 0) = \gamma''(\pi+0), \quad \gamma'''(\pi-0) = (0, 0, 1)$$

$$= \gamma'''(\pi+0). \text{ Тан. направление: } \mathcal{T}(\pi-0) = \mathcal{T}(\pi+0) = (0, 0, -1), \quad \mathcal{D}(\pi-0) = (1, 0, 0)$$

$$\mathcal{D}(\pi+0) = (0, 1, 0) \Rightarrow \beta(\pi-0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta(\pi+0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{до } \beta = [\mathcal{T}, \mathcal{D}], \quad \mathcal{D} = \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \mathcal{T} = \gamma')$$

$\kappa = 1$ на $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$; $\kappa = 0$ на $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ (до γ не меняется)

Задача 0.1. Знайдіть формулу для обчислення кривини довільної (класу C^2) явно заданої кривої $y=F(x)$.

Застосуйте знайдену формулу для обчислення кривини наступних явно заданих кривих:

1) $y=\sin x$,

2) $y = \operatorname{tg} x$

3) $y = x^2$

4) $y = x^3$

5) $y = \ln x$

Проаналізуйте, в яких точках на кривій: 1) кривина обертається в нуль, 2) кривина приймає максимальне значення. 2) кривина приймає мінімальне значення.

Розв'язання. Розглянемо загальну явно задану криву на площині:

$$y = F(x).$$

Запишемо радіус-вектор кривої:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу та другу похідну радіус-вектора кривої:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ F' \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ F'' \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{1 + (F')^2}, \quad \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F' & F'' \end{vmatrix} = F''$$

Обчислюємо кривину:

$$k = \frac{\left| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \right|}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|^3} = \frac{|F''|}{(1 + (F')^2)^{3/2}}$$

Застосуємо цю формулу:

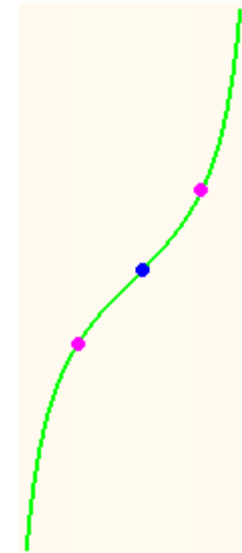
1) $y = \sin x$,

$$k = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$$



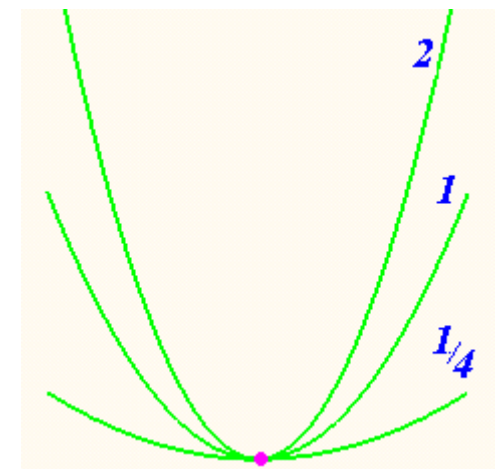
2) $y = \operatorname{tg} x$

$$k = \frac{2 |\sin x \cos^3 x|}{(1 + \cos^4 x)^{3/2}}$$



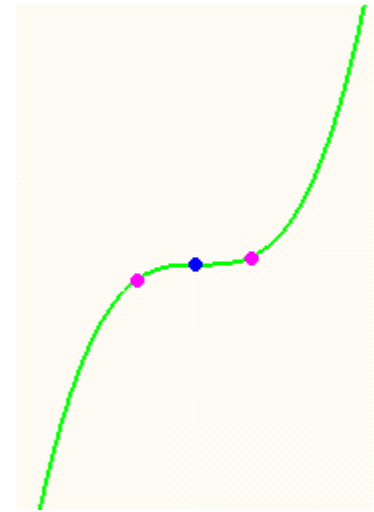
3) $y = C x^2$

$$k = \frac{2C}{(1 + 4C^2 x^2)^{3/2}}$$



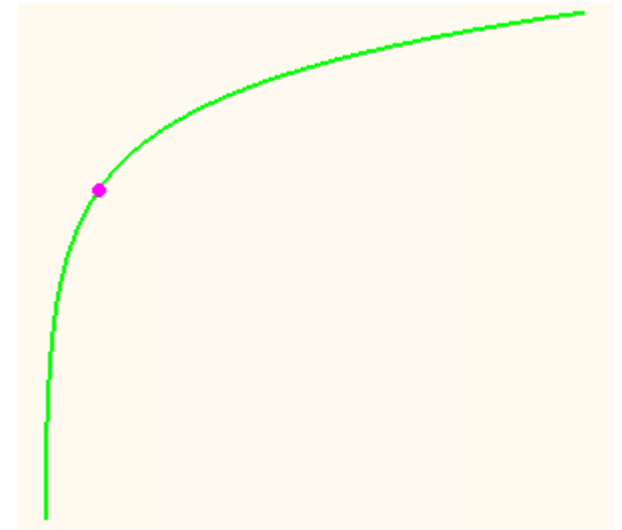
$$4) y = x^3$$

$$k = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$$



$$5) y = \ln x$$

$$k = \frac{|x|}{(1+x^2)^{3/2}}$$



Задача 0.2. Обчисліть кривину наступних плоских кривих:

$$1) \begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), P(t=\ln 2)$$

$$2) \begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), P(t=t_0)$$

$$3) \begin{cases} x^1 = e^{at} \cos t \\ x^2 = e^{at} \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

Намалюйте криві та спробуйте, дивлячись на малюнок, висловити гіпотези стосовно точок нульової кривини, точок максимальної кривини, точок мінімальної кривини на кожній з кривих. Підтвердіть або спростуйте гіпотези, проаналізувавши отримані функції кривини.

Розв'язання 3). Маємо

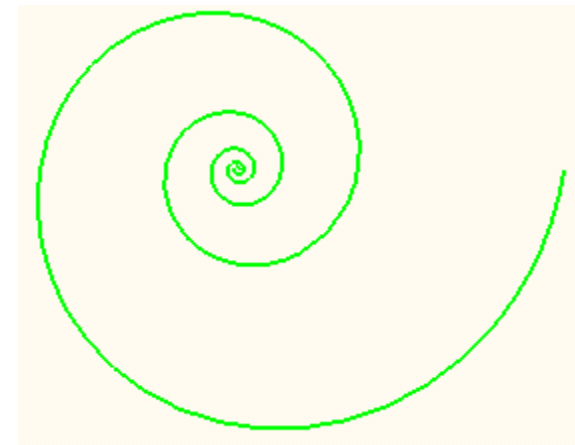
$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \cos t \\ e^{at} \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{f}' = \begin{pmatrix} e^{at} (a \cos t - \sin t) \\ e^{at} (a \sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{pmatrix} e^{at} ((a^2 - 1) \cos t - 2a \sin t) \\ e^{at} ((a^2 - 1) \sin t + 2a \cos t) \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'| = \sqrt{a^2 + 1} e^{at}$$

$$[\vec{f}', \vec{f}''] = \begin{vmatrix} e^{at} (a \cos t - \sin t) & e^{at} ((a^2 - 1) \cos t - 2a \sin t) \\ e^{at} (a \sin t + \cos t) & e^{at} ((a^2 - 1) \sin t + 2a \cos t) \end{vmatrix} = e^{2at} (a^2 + 1)$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{e^{2at} (a^2 + 1)}{(\sqrt{a^2 + 1} e^{at})^3} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} e^{at}}$$

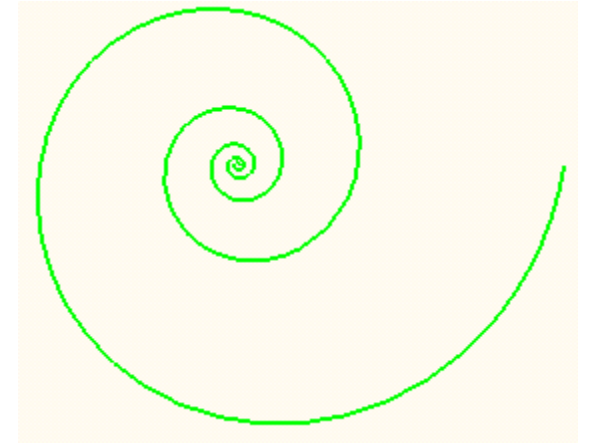
Відповідь: $k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} e^{at}}$



Додаток.

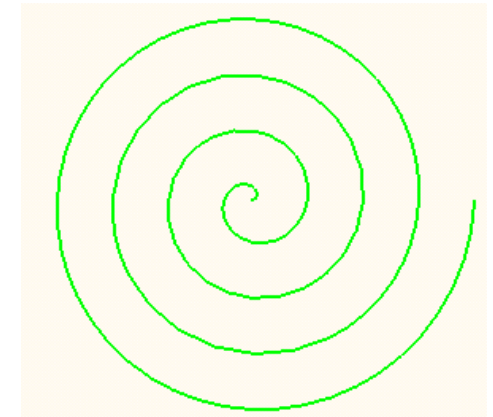
Логарифмічна спіраль

$$\begin{cases} x^1 = e^{at} \cos t \\ x^2 = e^{at} \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$



Спіраль Архімеда

$$\begin{cases} x^1 = at \cos t \\ x^2 = at \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$



Узагальнена спіраль

$$\begin{cases} x^1 = \rho(t) \cos t \\ x^2 = \rho(t) \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

????

Задача 0.3. Розглянемо наступну кривої γ в тримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ x^2 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \\ x^3 = r \cdot \sin(\alpha t) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty).$$

Проаналізуйте, в залежності від значень додатних параметрів c , r , α і β , коли радіус-вектор кривої γ є періодичною вектор функцією, а крива γ є замкнутою.

Обчисліть натуральний параметр s на кривій γ , який відраховується від точки $P(t=0)$.

Обчисліть кривину та скрут кривої γ в точці $P(t=0)$.

* Чи може задана крива γ бути плоскою при якихось значеннях додатних параметрів c , r , α і β ?

Спробуйте намалювати криву γ при якихось конкретних значеннях c , r , α і β .

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \\ r \cdot \sin(\alpha t) \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є періодичною з періодом T , якщо

$$\alpha T = 2\pi m, \quad \beta T = 2\pi n$$

для деяких цілих m, n .

Існування такого періоду T еквівалентно тому, що параметри α і β задовольняють $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ для деяких цілих m, n , тобто відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ є раціональним.

Обчислимо першу похідну радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} (-r\alpha \sin(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) - \beta(c + r \cos(\alpha t)) \sin(\beta t) \\ (-r\alpha \sin(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) + \beta(c + r \cos(\alpha t)) \cos(\beta t) \\ r\alpha \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$$

Маємо:
$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{\beta^2 (c + r \cdot \cos(\alpha t))^2 + r^2 \alpha^2}$$

Обчислимо першу, другу та третю похідні радіус-вектора в точці P :

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ (c+r)\beta \\ r\alpha \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0) = \begin{pmatrix} -r(\alpha^2 + \beta^2) - c\beta^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r(3\alpha^2\beta + \beta^3) - c\beta^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt}(0) \right| = \sqrt{b^2(c+r)^2 + r^2a^2}$$

$$\left[\frac{d\vec{f}}{dt}(0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0) \right] = \sqrt{b^2(c+r)^2 + r^2a^2} (\beta^2(c+r) + r\alpha^2)$$

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt}(0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0), \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}(0) \right) = r\alpha\beta (\beta^2(c+r) + (2r-c)a^2) (\beta^2(c+r) + r\alpha^2)$$

Обчислюємо натуральний параметр:

$$s = \int_0^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_0^t \sqrt{\beta^2 (c + r \cdot \cos(\alpha t))^2 + r^2 \alpha^2} dt$$

Обчислюємо кривину і скрут в точці $P(t=0)$:

$$k(0) = \frac{|[\vec{f}'(0), \vec{f}''(0)]|}{|\vec{f}'(0)|^3} = \frac{\beta^2 (c + r) + r \alpha^2}{\beta^2 (c + r)^2 + r^2 \alpha^2}$$

$$\kappa(0) = \frac{(\vec{f}'(0), \vec{f}''(0), \vec{f}'''(0))}{|[\vec{f}'(0), \vec{f}''(0)]|^2} = \frac{r \alpha \beta (\beta^2 (c + r) + (2r - c) \alpha^2)}{(\beta^2 (c + r)^2 + r^2 \alpha^2)(\beta^2 (c + r) + r \alpha^2)}$$

Якщо б крива γ була плоскою, то її скрут $\kappa \equiv 0$. Як наслідок, виконувалась би тотожність

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3 \vec{f}}{dt^3} \right) \equiv 0$$

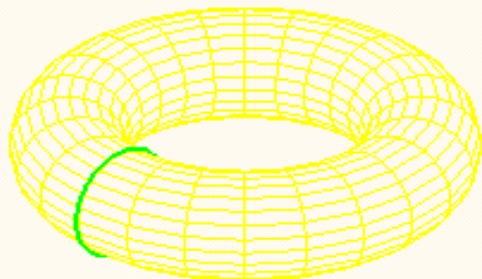
Ця тотожність зводиться до тригонометричної тотожності

$$\alpha \beta (A_0 + A_1 \cos \alpha t + A_2 \cos 2\alpha t + A_3 \cos 3\alpha t) \equiv 0$$

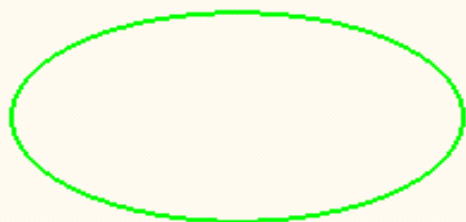
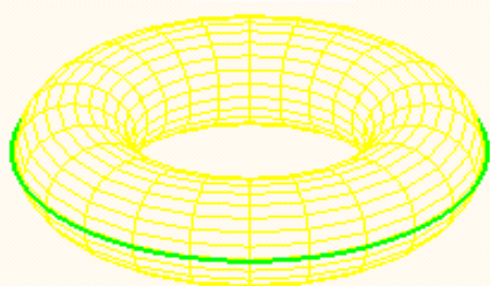
тобто, або $\alpha=0$, або $\beta=0$, або c, r, α і β задовольняють одночасно $A_1=A_2=A_3=A_4=0$.

Приклади:

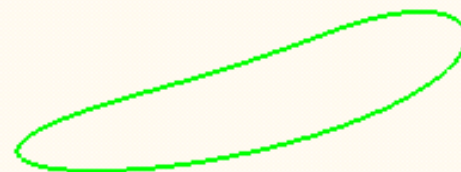
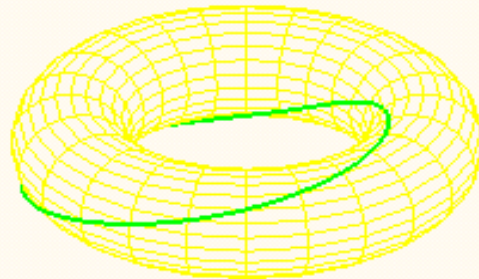
$$\alpha=1, \beta=0$$



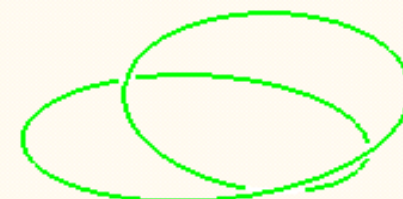
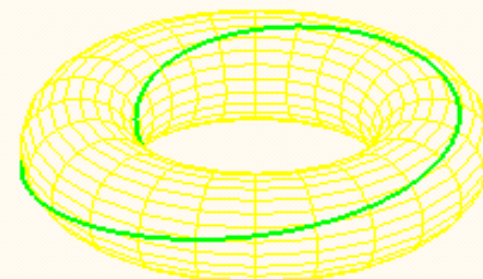
$$\alpha=0, \beta=1$$



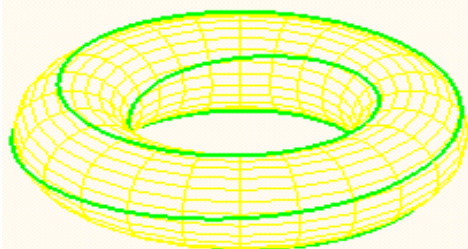
$$\alpha=1, \beta=1$$



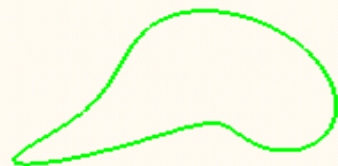
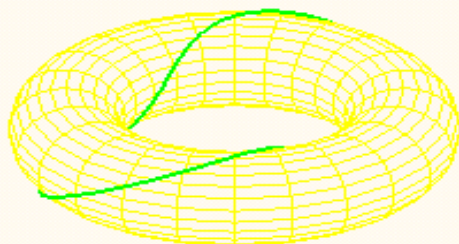
$$\alpha=1, \beta=2$$



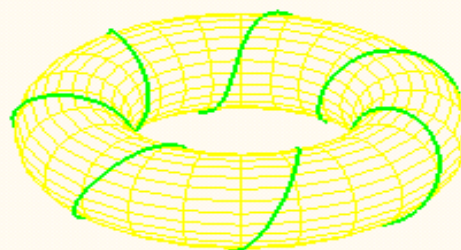
$$\alpha=1, \beta=4$$



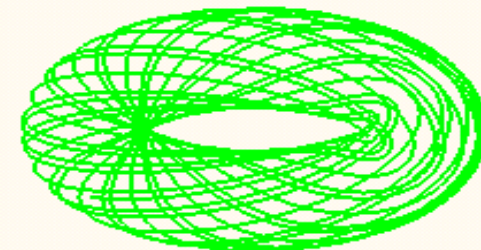
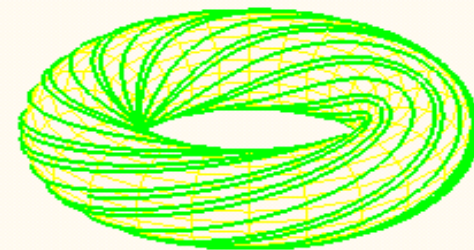
$$\alpha=2, \beta=1$$



$$\alpha=7, \beta=1$$



$$\alpha=\pi, \beta=e$$



Задача 0.4. Розглянемо криву γ в тримірному просторі, яка є регулярною класу C^m і не містить точок перегину. Проаналізуйте, якому класу гладкості належать кожне з векторних полей $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ рухомого репера Френе кривої γ , а також функції кривини і скруту кривої γ .

Розв'язання. Крива γ задана радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$ так, що

$$\vec{f}(t) \in C^m.$$

Тоді дотичне векторне поле

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|} \frac{d\vec{f}}{dt} \in C^{m-1},$$

векторні поля головних нормалей і бінормалей

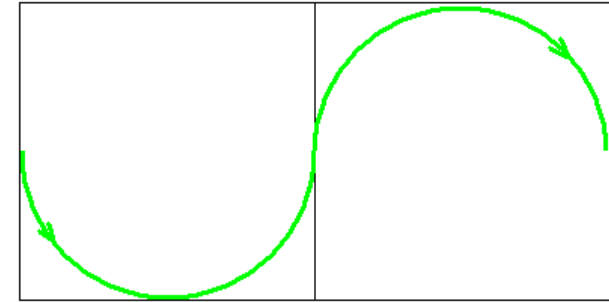
$$\vec{\beta} = \frac{1}{\left\| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \right\|} \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \in C^{m-2}, \quad \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}] \in C^{m-2},$$

кривина і скрут

$$k = \frac{\left| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \right|}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|^3} \in C^{m-2},$$

$$\kappa = \frac{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right)}{\left| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \right|^2} \in C^{m-3}$$

Задача-експеримент 0.5. Виріжте з паперу прямокутник, утворений з двох квадратів. В кожний з квадратів впишіть півколо так, щоб вийшла наступна крива Γ :



Перегніть прямокутник вздовж середньої лінії так, що квадрати лежали в перпендикулярних площинах (як пара граней куба).

Розглянемо криву γ , що утворилась з намальованої кривої Γ після переги-
нання.

Чи є крива γ регулярною? Якщо так, якого класу регулярності є крива γ ?

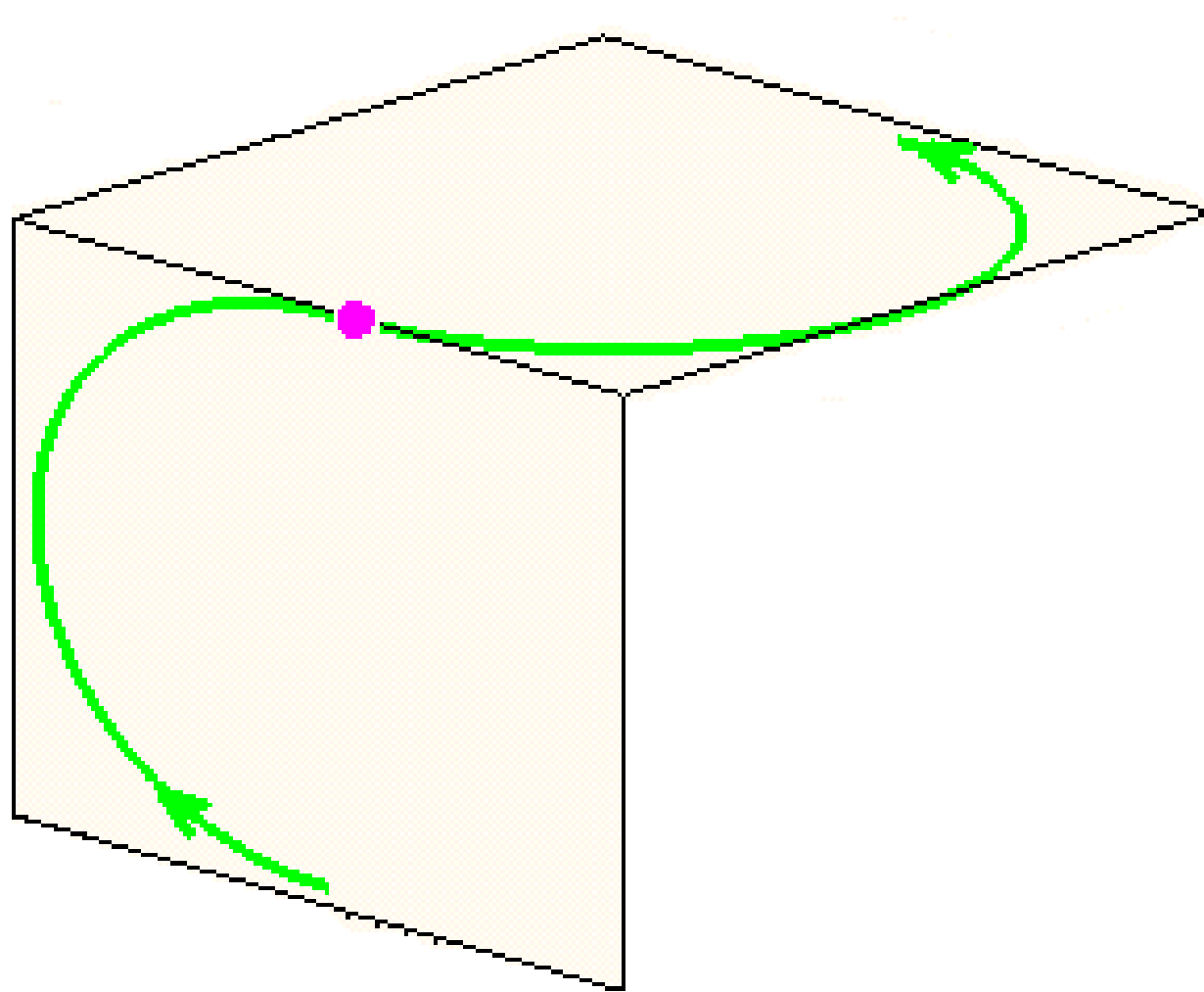
Чи є крива γ плоскою?

Намалюйте дотичне векторне поле $\vec{\tau}$ кривої γ , проаналізуйте його неперервність.

Намалюйте векторне поле головних нормалей $\vec{\nu}$ кривої γ , проаналізуйте його неперервність.

Опишіть векторне поле бінормалей $\vec{\beta}$ кривої γ , проаналізуйте його неперервність.

Чому дорівнюють кривина і скрут кривої γ ?



***Задача 0.6.** Визначимо векторний добуток пари векторів в n -мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1, \dots, X^n), \vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^n) \rightarrow [\vec{X}, \vec{Y}] := (p^{12}, p^{13}, p^{14}, \dots, p^{n-1n}),$$

де $p^{ij} := \begin{vmatrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{vmatrix}, 1 \leq i < j \leq n.$

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, N = C_n^2,$$

має наступні властивості:

$$1) [a\vec{X} + b\vec{Y}, \vec{Z}] = a[\vec{X}, \vec{Z}] + b[\vec{Y}, \vec{Z}], [\vec{X}, a\vec{Y} + b\vec{Z}] = a[\vec{X}, \vec{Y}] + b[\vec{X}, \vec{Z}]$$

$$2) [\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$$

$$3) \langle [\vec{X}, \vec{Y}], [\vec{Z}, \vec{W}] \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle & \langle \vec{X}, \vec{W} \rangle \\ \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle & \langle \vec{Y}, \vec{W} \rangle \end{vmatrix}$$

Чому дорівнює векторний добуток колінеарних векторів?

Чому дорівнює $|\vec{X}, \vec{Y}|^2$?

Зауваження. У випадку $n=3$, коли $N=3$ і можемо ототожнити \mathbb{R}^n і \mathbb{R}^N , в якому порядку треба розставити p^{ij} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток співпадав зі звичайним векторним добутком і, зокрема, задовольняв умові $[\vec{X}, \vec{Y}] \perp \vec{X}, \vec{Y}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів*

Рекомендації:

1. Ю.А.Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых
2. Н.В.Ефимов, Э.Р. Розендорн, Линейная алгебра и многомерная геометрия

Приклад доведення

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{cc} \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle & \langle \vec{X}, \vec{W} \rangle \\ \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle & \langle \vec{Y}, \vec{W} \rangle \end{array} \right| &= \sum_i X^i Z^i \sum_j Y^j W^j - \sum_j X^i W^i \sum_i Y^j Z^j = \\
 &= \sum_{i,j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i,j} X^i W^i Y^j Z^j = \\
 &= \sum_{i < j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i < j} X^i W^i Y^j Z^j + \sum_{i > j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i > j} X^i W^i Y^j Z^j = \\
 &= \sum_{k < l} X^k Z^k Y^l W^l - \sum_{k < l} X^k W^k Y^l Z^l + \sum_{l > k} X^l Z^l Y^k W^k - \sum_{l > k} X^l W^l Y^k Z^k = \\
 &= \sum_{k < l} X^k Z^k Y^l W^l - X^k W^k Y^l Z^l + X^l Z^l Y^k W^k - X^l W^l Y^k Z^k = \\
 &= \sum_{k < l} (X^k Y^l - X^l Y^k)(Z^k W^l - W^k Z^l) = \langle [\vec{X}, \vec{Y}], [\vec{Z}, \vec{W}] \rangle
 \end{aligned}$$

***Задача 0.7.** Визначимо векторний добуток трійки векторів в n -мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1, \dots, X^n), \vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^n), \vec{Z} = (Z^1, \dots, Z^n) \rightarrow$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) := (p^{123}, \dots, p^{n-2n-1n}),$$

де $p^{ijk} := \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}, 1 \leq i < j < k \leq n.$

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, N = C_n^3,$$

має наступні властивості:

1) лінійність по кожному аргументу,

2) якщо переставити місцями аргументи, то векторний добуток або не зміниться, якщо перестановка є парною, або змінить знак, якщо перестановка є непарною.

$$3) \langle [\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}], [\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{X}, \vec{U} \rangle & \langle \vec{X}, \vec{V} \rangle & \langle \vec{X}, \vec{W} \rangle \\ \langle \vec{Y}, \vec{U} \rangle & \langle \vec{Y}, \vec{V} \rangle & \langle \vec{Y}, \vec{W} \rangle \\ \langle \vec{Z}, \vec{U} \rangle & \langle \vec{Z}, \vec{V} \rangle & \langle \vec{Z}, \vec{W} \rangle \end{vmatrix}$$

Чому дорівнює векторний добуток компланарних векторів?

Чому дорівнює $|\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}|^2$?

Зауваження. У випадку $n=4$, коли $N=4$ і можемо ототожнити \mathbb{R}^n і \mathbb{R}^N , в якому порядку треба розставити p^{ijk} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток задовольняв умові $[\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}] \perp \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів*

Рекомендації:

3. Ю.А.Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых
4. Н.В.Ефимов, Э.Р. Розендорн, Линейная алгебра и многомерная геометрия

***Задача 0.8.** Обчисліть кривину та скрут наступної кривої γ в чотиримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = A \cdot \cos(\alpha t) \\ x^2 = A \cdot \sin(\alpha t) \\ x^3 = B \cdot \cos(\beta t) \\ x^4 = B \cdot \sin(\beta t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} A \cos(\alpha t) \\ A \sin(\alpha t) \\ B \cos(\beta t) \\ B \sin(\beta t) \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є періодичною з періодом T , якщо

$$\alpha T = 2\pi m, \quad \beta T = 2\pi n$$

для деяких цілих m, n . Це еквівалентно раціональності відношення $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$

Обчислимо першу, другу та третю похідні радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\alpha A \sin(\alpha t) \\ \alpha A \cos(\alpha t) \\ -\beta B \sin(\beta t) \\ \beta B \cos(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 A \cos(\alpha t) \\ -\alpha^2 A \sin(\alpha t) \\ -\beta^2 B \cos(\beta t) \\ -\beta^2 B \sin(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} = \begin{pmatrix} \alpha^3 A \sin(\alpha t) \\ -\alpha^3 A \cos(\alpha t) \\ -\beta^3 B \sin(\beta t) \\ -\beta^3 B \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2},$$

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \right|^2 &= \begin{vmatrix} \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right\rangle & \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle & \left\langle \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 & 0 \\ 0 & A^2 \alpha^4 + B^2 \beta^4 \end{vmatrix} = \\ &= (A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2)(A^2 \alpha^4 + B^2 \beta^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right] \right|^2 &= \begin{vmatrix} \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right\rangle & \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle & \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle & \left\langle \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right\rangle & \left\langle \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right\rangle & \left\langle \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right\rangle & \left\langle \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} \right\rangle \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 & 0 & -A^2\alpha^4 - B^2\beta^4 \\ 0 & A^2\alpha^4 + B^2\beta^4 & 0 \\ -A^2\alpha^4 - B^2\beta^4 & 0 & A^2\alpha^6 + B^2\beta^6 \end{vmatrix} = \\
&= A^2B^2\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)^2(A^2\alpha^4 + B^2\beta^4)
\end{aligned}$$

Знаходимо кривину і скрут:

$$k = \frac{\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2} \sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{(\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2})^3} = \frac{\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}$$

$$\kappa = \frac{|AB\alpha\beta| \cdot |\alpha^2 - \beta^2|}{(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2) \sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}$$

Відповідь: $k = \frac{\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}$, $\kappa = \frac{|AB\alpha\beta| \cdot |\alpha^2 - \beta^2|}{(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2) \sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}$

Задача 1. Знайдіть векторне поле \vec{w} вздовж кривої γ в \mathbb{R}^3 таке, що формули Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}$$

перепишуються у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\tau}]$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\nu}]$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\beta}]$$

Розв'язання:

Запишемо шукане векторне поле $\vec{w} = \vec{w}(s)$ у вигляді лінійної комбінації векторів реперу Френе:

$$\vec{w} = A\vec{t} + B\vec{v} + C\vec{\beta}$$

Обчислимо потрібні нам векторні добутки

$$[\vec{w}, \vec{t}] = [A\vec{t} + B\vec{v} + C\vec{\beta}, \vec{t}] = B[\vec{v}, \vec{t}] + C[\vec{\beta}, \vec{t}] = -B\vec{\beta} + C\vec{v}$$

$$[\vec{w}, \vec{v}] = [A\vec{t} + B\vec{v} + C\vec{\beta}, \vec{v}] = A[\vec{t}, \vec{v}] + C[\vec{\beta}, \vec{v}] = A\vec{\beta} - C\vec{t}$$

$$[\vec{w}, \vec{\beta}] = [A\vec{t} + B\vec{v} + C\vec{\beta}, \vec{\beta}] = A[\vec{t}, \vec{\beta}] + B[\vec{v}, \vec{\beta}] = -A\vec{v} + B\vec{t}$$

Якщо покласти $A = \kappa$, $B=0$, $C = k$, тобто,

$$\vec{w} = \kappa\vec{t} + k\vec{\beta},$$

то отримаємо

$$[\vec{w}, \vec{t}] = k\vec{v} = \vec{t}'_s$$

$$[\vec{w}, \vec{v}] = -k\vec{t} + \kappa\vec{\beta} = \vec{v}'_s$$

$$[\vec{w}, \vec{\beta}] = -\kappa\vec{v} = \vec{\beta}'_s$$

Вектор-функція $\vec{W} = \vec{W}(s)$ називається *векторним полем Дарбу* вздовж кривої γ .

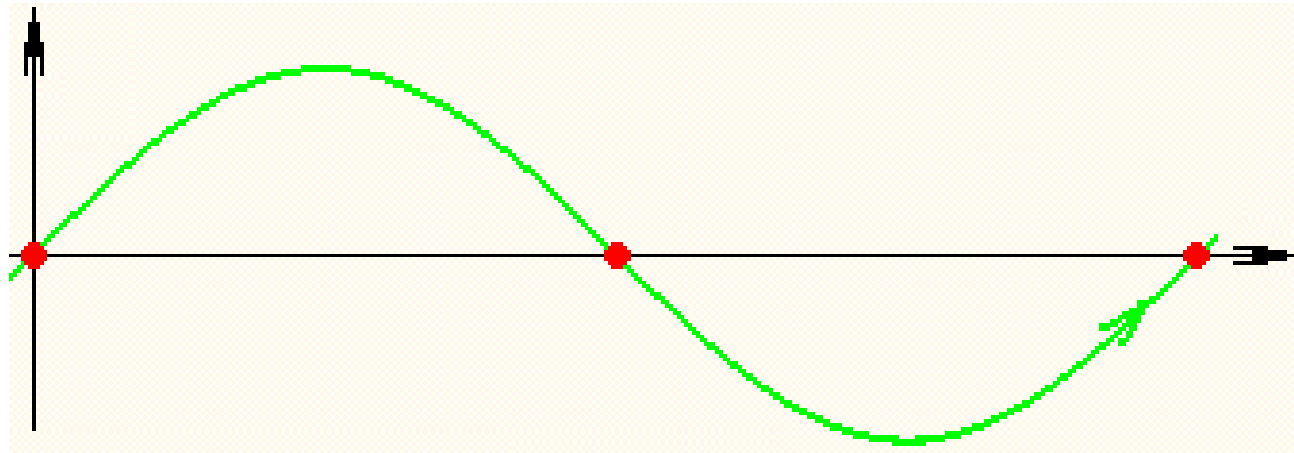
Це векторне поле має важливе значення з точки зору фізичної інтерпретації кривої як траєкторії рухомої точки.

Задача 2. Обчислити кривину зі знаком k^* параметрично заданої кривої

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Проаналізуйте розподіл знаку кривини k^* .

Розв'язання. Задана крива – це синусоїда.



Застосуємо формулу

$$k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

Маємо:

$$k^* = \frac{1 \cdot (-\sin t) - 0 \cdot \cos t}{\left(\sqrt{(1)^2 + (\cos t)^2}\right)^3} = \frac{-\sin t}{\left(\sqrt{1 + \cos^2 t}\right)^3}$$

Відповідь: $k^* = \frac{-\sin t}{\left(\sqrt{1 + \cos^2 t}\right)^3}$

Задача 3. Запишіть натуральне рівняння ланцюгової лінії

$$\gamma: \begin{cases} x = at \\ y = a \cosh t \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо натуральний параметр

$$s = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int \sqrt{(a)^2 + (a \sinh t)^2} dt = \int a \cosh t dt = a \sinh t + c$$

Знайдемо кривину зі знаком:

$$k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{a \cdot a \cosh t - 0 \cdot a \sinh t}{\left(\sqrt{(a)^2 + (a \sinh t)^2}\right)^3} = \frac{1}{a \cosh^2 t}$$

Натуральне рівняння ланцюгової лінії:

$$\begin{cases} s = a \sinh t + c \\ k^* = \frac{1}{a \cosh^2 t} \end{cases}, \quad \text{тобто,} \quad k^* = \frac{a}{a^2 + (s - c)^2}$$

Відповідь: $k^* = \frac{a}{a^2 + (s - c)^2}$

Задача 3. Запишіть натуральне рівняння ланцюгової лінії

$$\gamma: \begin{cases} x = at \\ y = a \cosh t \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо натуральний параметр

$$s = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int \sqrt{(a)^2 + (a \sinh t)^2} dt = \int a \cosh t dt = a \sinh t + c$$

Знайдемо кривину зі знаком:

$$k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{a \cdot a \cosh t - 0 \cdot a \sinh t}{\left(\sqrt{(a)^2 + (a \sinh t)^2}\right)^3} = \frac{1}{a \cosh^2 t}$$

Натуральне рівняння ланцюгової лінії:

$$\begin{cases} s = a \sinh t + c \\ k^* = \frac{1}{a \cosh^2 t} \end{cases}, \quad \text{тобто,} \quad k^* = \frac{a}{a^2 + (s - c)^2}$$

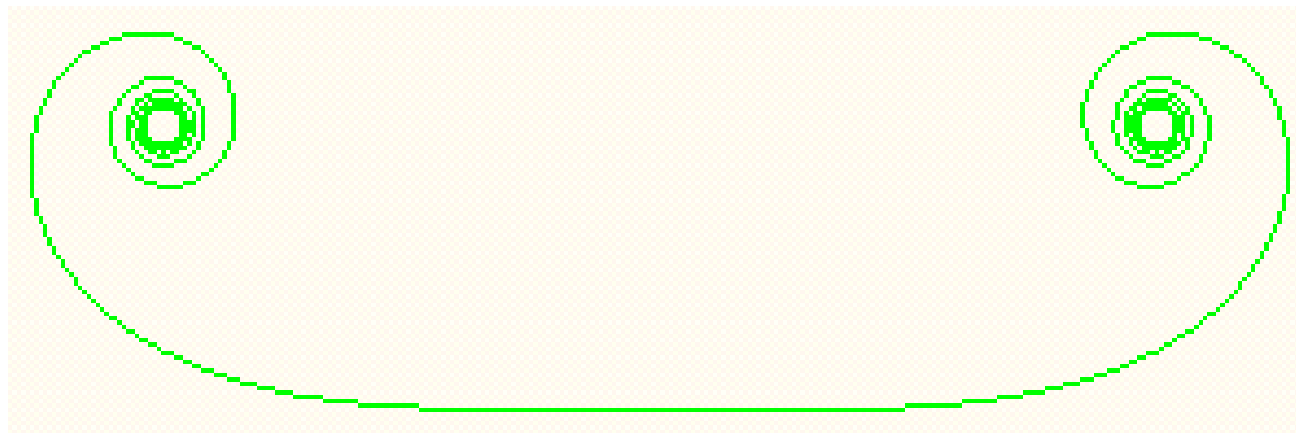
Відповідь: $k^* = \frac{a}{a^2 + (s - c)^2}$

Задача 4. Знайдіть криву в \mathbb{R}^2 , задану натуральним рівнянням $k^* = s^2$

Розв'язання.

$$\text{Крок 1)} \quad \frac{d\alpha}{ds} = s^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int_{s_0}^s s^2 ds + \alpha_0 = \frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0$$

$$\text{Крок 2)} \quad \begin{cases} x' = \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0\right) \\ y' = \sin\left(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \int_0^s \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0\right) ds + f_0^1 \\ y = \int_0^s \sin\left(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0\right) ds + f_0^2 \end{cases}$$



Задача 7.1с. Знайдемо кривину пласкої кривої

$$x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t,$$

тобто вітки канонічної гіперболи. Оскільки вона пласка, її скрут автоматично дорівнює нулю. Кривину можна підрахувати за загальною формулою для просторових кривих, як у попередній задачі, поклавши

$$r = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t, 0).$$

Однак для пласких кривих зазвичай використовується уточнене поняття кривини, що наділена знаком. Вона визначена формулою

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}.$$

У нашому випадку

$$k = \frac{a \operatorname{sh} t b \operatorname{sh} t - a \operatorname{ch} t b \operatorname{ch} t}{(\sqrt{(a \operatorname{sh} t)^2 + (b \operatorname{ch} t)^2})^3} = \frac{-ab}{(\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t})^3}.$$

Задача 7.1б. Знайдемо кривину явно заданої пласкої кривої

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

(ланцюгової лінії). Як і раніше, для цього будемо явно задану криву $y = f(x)$ розглядати як параметрично задану з параметром x :

$$r = (x, f), r' = (1, f'), |r'| = \sqrt{1 + f'^2}, r'' = (0, f'').$$

Тому за формулою з минулої задачі маємо

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{|r'|^3} = \frac{f''}{(\sqrt{1 + f'^2})^3}.$$

У нашому випадку $f' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, $f'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, отже

$$k = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a \left(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\right)^3} = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a \left(\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}\right)^3} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}.$$

Також ви можете самостійно підрахувати кривину для натуральної параметризації з відповіді задачі 6.12 і впевнитися у тому, що це те саме значення (можливо, з точністю до знака). У цьому випадку формула для кривини пласкої кривої набуде спрощеного вигляду

$$k = x'y'' - x''y' = \langle \tau', \nu \rangle,$$

де $\tau = r' = (x', y')$ – одиничний дотичний вектор, а $\nu = (-y', x')$ – одиничний вектор нормалі такий, що $\{\tau, \nu\}$ утворюють додатно орієнтований ортонормований базис (репер Френе пласкої кривої).

Задача 7.3а. Знайдемо кривину пласкої кривої, що задана загальним рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$. Як і раніше, спочатку перейдемо до декартових координат, записавши вектор-функцію у вигляді

$$r(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} r' &= (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi), \\ |r'| &= \sqrt{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}, \\ r'' &= (\rho'' \cos \varphi - 2\rho' \sin \varphi - \rho \cos \varphi, \rho'' \sin \varphi + 2\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi). \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} k &= \frac{x'y'' - x''y'}{|r'|^3} = \\ &= \frac{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)(\rho'' \sin \varphi + 2\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) - (\rho'' \cos \varphi - 2\rho' \sin \varphi - \rho \cos \varphi)(\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3} = \\ &= \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3}. \end{aligned}$$

Задача 7.4а. Щоб знайти кривину пласкої кривої, що у полярних координатах задана функцією $\rho = a e^{h\varphi}$ (де $a > 0$), достатньо просто підставити її у формулу з попередньої задачі:

$$k = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3} = \frac{-a e^{h\varphi} h^2 a e^{h\varphi} + 2a^2 h^2 e^{2h\varphi} + a^2 e^{2h\varphi}}{(\sqrt{a^2 h^2 e^{2h\varphi} + a^2 e^{2h\varphi}})^3} = \frac{1}{a e^{h\varphi} \sqrt{h^2 + 1}}.$$

Задача 7.3б. Знайдемо кривину неявно заданої пласкої кривої (лінії), що визначена рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Оскільки поняття кривини має сенс лише за умови регулярності, ми можемо розглядати лише точки кривої, в околі яких хоча б одна з часткових похідних F_x, F_y ненульова. Також відразу уловимося, що F – класу C^2 . Нехай для визначеності $F_y \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію в околі такої точки лінія є графіком явно заданої кривої $y = f(x)$, тобто

$$F(x, f(x)) = 0$$

для усіх x з деякого інтервалу. Продиференціюємо цю умову двічі:

$$F_x + F_y f' = 0,$$

$$F_{xx} + F_{xy} f' + F_{yx} f' + F_{yy} f'^2 + F_y f'' = 0.$$

Отже,

$$f' = -\frac{F_x}{F_y},$$

$$f'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy} f' + F_{yy} f'^2}{F_y} = \frac{1}{F_y} \left(-F_{xx} + 2F_{xy} \frac{F_x}{F_y} - F_{yy} \frac{F_x^2}{F_y^2} \right).$$

Тому за формулою, яку ми вивели у розв'язку задачі 7.1b,

$$\begin{aligned} k &= \frac{f''}{(\sqrt{1 + f'^2})^3} = \frac{1}{F_y \left(\sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}} \right)^3} \left(-F_{xx} + 2F_{xy} \frac{F_x}{F_y} - F_{yy} \frac{F_x^2}{F_y^2} \right) = \\ &= \frac{-F_{xx} F_y^2 + 2F_{xy} F_x F_y - F_{yy} F_x^2}{(\sqrt{F_x^2 + F_y^2})^3}. \end{aligned}$$

Строго кажучи, тут повинен ще з'явитися знак F_y , але такими деталями зазвичай нехтують, бо знак кривини, обчисленої за цією формулою, все одно буде залежати від вибору знака F (див. приклад у наступній задачі). Цей вираз для кривини також часто переписують у вигляді

$$k = -\frac{F_{xx}(F_x^2 + F_y^2) - F_x(F_x F_{xx} + F_y F_{yx})}{(\sqrt{F_x^2 + F_y^2})^3} - \frac{F_{yy}(F_x^2 + F_y^2) - F_y(F_x F_{xy} + F_y F_{yy})}{(\sqrt{F_x^2 + F_y^2})^3} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right)$$

або з плюсами перед похідними відношень замість мінусів. В околі точки, де $F_x \neq 0$, лінія буде графіком явно заданої кривої $x = g(y)$. Переконайтеся самостійно, що для такого задання ми отримуємо ту саму формулу.

Задача 7.4d. Знову знайдемо кривину канонічної гіперболи, цього разу використавши її неявне задання

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тут $a > 0$, $b > 0$. Домноживши на a^2b^2 , можна покласти $F(x, y) = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$. Тоді

$$F_x = 2b^2x, F_y = -2a^2y, F_{xx} = 2b^2, F_{xy} = 0, F_{yy} = -2a^2,$$

і за формулою з попередньої задачі маємо

$$k = \frac{-8b^2a^4y^2 + 0 + 8a^2b^4x^2}{(\sqrt{4b^4x^2 + 4a^4y^2})^3} = \frac{a^4b^4}{(\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2})^3} = \frac{ab}{\left(\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\right)^3}.$$

Тут при перетворенні числівника ми використали умову $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, після цього поділили числівник та знаменник на a^3b^3 . Зауважимо, що отриманий вираз відрізняється від результату задачі 7.1с лише знаком. Замінивши функцію F на $-F$ (сама крива при цьому, очевидно, не зміниться), ми отримуємо вираз з задачі 7.1с. Це демонструє, зокрема, що знак кривини плоскої кривої залежить від вибору параметра, а тому не є "достатньо добрим" геометричним інваріантом на відміну від модуля цієї кривини.