Повністю нелінійні рівняння: приклад

$$\begin{cases} u_{x_1}u_{x_2} - 4(x_1+x_2)^2 = 0, \\ u(x_1, 0) = x_1^2 \end{cases}$$

Рівняння має вигляд: $F(p_1, p_2, x_1, x_2, z) = 0$, де $F(p_1, p_2, x_1, x_2, z) = p_1p_2 - -4(x_1+x_2)^2$, $p_1 = u_{x_1}$, $p_2 = u_{x_2}$

Початкові умови: $\Gamma = \{(y, 0), y \in \mathbb{R}\}$; $u(y, 0) = y^2$.

Похідні від F:

$$F_{p_1} = p_2,\ F_{p_2} = p_1,\ F_{x_1} = F_{x_2} = -8(x_1+x_2),\ F_z = 0$$

Звідси – характеристичні рівняння:

$$\dot{x}_1 = p_2 (= F_{p_1}),$$

$$\dot{x}_2 = p_1 (= F_{p_2}),$$

$$\dot{p}_1 = 8(x_1+x_2)(= -F_{x_1} - F_z p_1),$$

$$\dot{p}_2 = 8(x_1+x_2)(= -F_{x_2} - F_z p_2),$$

$$\dot{z} = 2p_1p_2 (= F_{p_1}p_1 + F_{p_2}p_2).$$

Початкові умови:

$$z(0; y) = y^2,\ x_1(0; y) = y,\ x_2(0; y) = 0$$

Стосовно початкових умов для градієнта:
(i) $p_1(0)$ вираховується з початкової умови для $u(x_1, 0)$:

$$p_1(0; y) = u_{x_1}(y, 0) = (y^2)_y = 2y;$$

(ii) $p_2(0)$ вираховується з самого диф. рівняння, приймаючи до уваги, що $p_1(0)$ вже визначено:

$$0 = p_1(0; y)p_2(0; y) - 4(x_1(0, y) + x_2(0, y))^2,$$

звідки $p_2(0; y) = \frac{4y^2}{2y} = 2y$.

Рівняння для характеристичних кривих – зв'язана система рівнянь для x_1, x_2 та p_1, p_2. Але для суми $p_{sum} := p_1 + p_2$ отримуємо одне рівняння (але – другого порядку):

$$\ddot{p}_{sum}(s) = 16p_{sum}$$

з двома початковими умовами:

$$p_{sum}(0;y) = p_1(0;y) + p_2(0;y) = 4y,$$

$$\dot{p}_{sum}(0;y) = \dot{p}_1(0;y) + \dot{p}_2(0;y) = 16(x_1(0;y) + x_2(0;y)) = 16y.$$

Розв'язок для $p_{sum}(s)$:

$$p_{sum}(s) = C_1 e^{4s} + C_2 e^{-4s}.$$

Підствляючи у початкові умови, знаходимо: $C_1 = 4y$, $C_2 = 0$.

Отже, $p_1(s;y)+p_2(s;y) = 4ye^{4s}$. З іншого боку, для різниці $p_1 - p_2$ маємо рівняння $\frac{d}{ds}(p_1(s;y) - p_2(s;y)) = 0$ з нульовим початковим значенням: $p_1(0;y) - p_2(0;y) = 0$, звідки $p_1(s;y) = p_2(s;y)$; отже,

$$p_1(s;y) = p_2(s;y) = 2ye^{4s}.$$

Тепер це можна підставити у диф. рівняння для $x_1(s;y)$ і $x_2(s;y)$, що дає

$$\dot{x}_1(s;y) = 2ye^{4s},\ x_1(0;y) = y \Rightarrow\ x_1(s;y) = \frac{y}{2}e^{4s} + \frac{y}{2},$$

$$\dot{x}_2(s;y) = 2ye^{4s},\ x_2(0;y) = 0 \Rightarrow\ x_2(s;y) = \frac{y}{2}e^{4s} - \frac{y}{2}.$$

Зокрема, $x_1(s;y) + x_2(s;y) = ye^{4s}$.

Тепер – визначимо $z(s;y)$:

$$\dot{z} = 2p_1p_2 = 8y^2e^{8s},\ z(0;y) = y^2 \Rightarrow\ z(s;y) = y^2e^{8s}.$$

Загальний підхід до побудови $u(x_1, x_2)$:

$$u(x_1, x_2) = z(s;y)\Big|_{\substack{s=s(x_1,x_2)\\ y=y(x_1,x_2)}}$$

Але, помічаючи, що

$$y^2e^{8s} = (x_1(s;y) + x_2(s;y))^2,$$

отримуємо кінцевий результат:

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2.$$