Напівлінійні рівняння: ще один приклад

$$\begin{cases} u_t + (x+t)u_x = 0, \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

Тут коефіцієнти: $a = (1, x+t)$,

$\Gamma = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$.

(i) Рівняння для характеристичних кривих: рівняння для $t = t(s;y)$ і $x = x(s;y)$ – диференціальні рівняння відносно s, де y відіграє роль параметра (тобто, мова йде про багато рівнянь: для кожного y – своє рівняння і своя початкова умова), плюс початкова умова.

Диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds}(s;y) = 1 \\ \frac{dx}{ds}(s;y) = x(s;y) + t(s;y) \end{cases}$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} t(0;y) = 0 \\ x(0;y) = y \end{cases}$$

Розв'язання: рівняння для $t = t(s;y)$ розв'язується тривіально: $t(s;y) = s$ (для всіх y); підставляється у рівняння для $x = x(s;y)$, яке набуває вигляду

$$\frac{dx}{ds}(s;y) = x(s;y) + s.$$

Це - лінійне неоднорідне рівняння; його можна розв'язати методом варіації постійної:

1. Розв'язок відповідного однорідного рівняння $\frac{dx}{ds} = x$:

$$x_0(s) = Ce^s,$$

де C – будь-яка стала.

2. Розв'язок неоднорідного рівняння $\frac{dx}{ds} = x + s$ шукаємо у вигляді $x(s) = C(s)e^s$. Підставляючи у рівняння для x, отримуємо рівняння для $C(s)$: $\frac{dC}{ds} = se^{-s}$, звідки

$$C(s) = C(0) + \int_0^s \xi e^{-\xi} d\xi = C(0) + 1 - e^{-s}(s+1)$$

3. Зважаючи на початкову умову $x(0) = y$, отримуємо $C(0) = y$, і розв'язок $x(s; y)$ приймає остаточний вигляд:

$$x(s; y) = (y + 1)e^s - s - 1.$$

4. Отже, рівняння характеристик мають вигляд:

$$\begin{cases} t(s; y) = s \\ x(s; y) = (y + 1)e^s - s - 1 \end{cases}.$$

Ці рівняння можна розв'язати відносно $s = s(t, x)$ і $y = y(t, x)$:

$$\begin{cases} s(t, x) = t \\ y(t, x) = (x + t + 1)e^{-t} - 1. \end{cases}$$

(ii) У випадку напівлінійних рівнянь, диференціальне рівняння для розв'язку вихідного РЧП вздовж характеристик пишеться окремо. У даному випадку, воно має вигляд

$$\frac{dz}{ds}(s; y) = 0; \quad z(0; y) = f(y).$$

Його розв'язок – стала (відносно s, але залежить від параметра y!):

$$z(s; y) = z(0; y) = [\text{з початкової умови}] = f(y)$$

(iii) Нарешті, розв'язок РЧП: $u(t, x) = z(s, y)|_{s=s(t,x),y=y(t,x)}$. У даному випадку,

$$u(t, x) = z(s, y)|_{s=s(t,x),y=y(t,x)} = z(0, y)|_{y=y(t,x)} = f(y)|_{y=y(t,x)} = f\left((x + t + 1)e^{-t} - 1\right)$$