Рівняння з частинними похідними - 2
Лекція 4

Викладач: Д.Г. Шепельський

ХНУ

2023

Теорема Коші-Ковалевської

- проблема з методом характеристик: не працює для систем РЧП;
- Теорема Коші-Ковалевської (ТКК): працює для систем РЧП; аналог теореми Пікара (Пікара-Лінделефа) в теорії ЗДР;
- обмеження на застосування ТКК: працює з (дійсно) аналітичними функціями;
- "не розрізняє" додатний та від'ємний напрямок часу у рівнянні теплопровідності (задача Коші);
- не працює для крайовх задач (для багатьох РЧП – більш важливі з точки зору застосувань)

Теорема Коші-Ковалевської

Ряд Тейлора функції $f \in C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ у точці $x_0 \in U$:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha (x - x_0)^\alpha, \quad f_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}$$

($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ мультиіндекс)

Визначення

Функція є дійсно-аналітичною у деякій області, якщо вона зображується рядом Тейлора, що (абсолютно) збігається в околі кожної точки області

- якщо коефіцієнти РЧП – дійсно-аналітичні, то можна спробувати застосувари само рівняння для (рекурсивного) визначення всіх похідних (а значить, і ряду Тейлора) розв'язку;
- може працювати тільки в малому околі $\Rightarrow$ локальний характер результатів.

Теорема Коші-Ковалевської

Розглянемо задачу Коші для **системи квазілінійних рівнянь першого порядку**:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x,u)u_{x_k} + b(x,u) = 0, \quad u(y) = g(y), \; y \in \Gamma$$

Тут $u(x) = (u^1(x), ..., u^m(x))$ – вектор, A_k – матриця $m \times m$ (рівнянь – стільки, скільки є невідомих функцій), $b(x,u)$ – вектор (m).

- Припущення: Γ – дійсно-аналітична поверхня: у малій відкритій множині $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

  $$\Gamma = \{x \in U | x_n = \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

  де функція γ – дійсно-аналітична (якщо треба – переставимо координати).

Зробимо Γ "прямою" за допомогою заміни координат

$$y := (x_1, ..., x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, ..., x_{n-1})),$$

яка перетворює Γ у гіперплощину $y_n = 0$.

Рівняння у нових координатах – знову квазілінійне, з коефіцієнтами

$$\tilde{A}_k = \begin{cases} A_k, & 1 \leq k < n \\ A_n = \sum_{l=1}^{m-1} A_l \partial_l \gamma, & k = n \end{cases}$$

$$\tilde{b} = b$$

Стосовно початкової поверхні, можна вважати що $\Gamma = \{x \in U | x_n = 0\}$; $x = (\overline{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$

Ми збираємося розв'язувати задачу, вираховуючи члени ряду Тейлора у деякій заданій точці $y_0 \in \Gamma$ (без обмеження загальності: $y_0 = 0$).
З початкових умов маємо:

$$u(0) = g(0), \quad u_{x_1}(0) = g_{x_1}(0) \cdot \ldots \cdot u_{x_{n-1}}(0) = g_{x_{n-1}}(0).$$

Треба: вирахувати похідні, що залишилися: $u_{x_n}(0)$ (нагадую: u – вектор)

Щоб мати можливість вирахувати ці похідні – має виконуватися умова нехарактеристичності

$$\det(A_n(0, g(0))) \neq 0$$

У випадку $m = 1$: $\det(A_n) = A_n = a_n \neq 0$, що спів падає зі скалярним випадком.
Якщо умова нехарактеристичності виконана, то задача зводиться до

$$u_{x_n} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x, u) u_{x_k} + b(x, u), \quad u(\overline{x}, 0) = g(\overline{x})$$

Теорема Коші-Ковалевської

Теорема

Припустимо, що в задачі (загального вигляду)

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x,u)u_{x_k} + b(x,u) = 0; \quad u(y) = g(y), y \in \Gamma \ \ (*)$$

ккоефіцієнти A_k, b, *поверхня* Γ *і початкова умова* g *–дійсно-аналінични функції у околі точки* $x_0 \in \Gamma$. *Нехає виконана умова нехарактеристичності*

$$\det(\sum_{k=1}^{n} \nu_k(x_0)A_k(x_0, g(x_0)) \neq 0,$$

где $\nu(x_0)$ *– вектор нормалі до* Γ *в точці* x_0.
Тоді початкова задача (*) має єдиний дійсно-аналітичний розв'язок в околі x_0.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можна (i) "випрямити" поверхню з початковими умовами та (ii) спростити рівняння:

$$u_{x_n} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x,u)u_{x_k} + b(x,u), \quad u(\overline{x},0) = g(\overline{x}) \ \ (\overline{x} = (x_1, ..., x_{n-1}))$$

- Далі, можна позбавитися залежності коефіцієнтів від x_n, добавив залежну змінну u^{m+1}: $u^{m+1}_{x_n} = 1, u^{m+1}(\overline{x},0) = 0$.
- Нарешті, роблячи заміну $u \to u - g$, можна вважати (без втрати загальності), що $g = 0$. Також вважаємо, що $x_0 = 0$.
- Тоді: можна вирахувати всі похідні $(\partial^\alpha u)(0)$, рекурсивно використовуючи РЧП. Наприклад, це можна зробити індукцією за числом r прохідних за x_n.

Теорема Коші-Ковалевської

Індукція за числом r прохідних за x_n:

(i) якщо $r = \alpha_n = 0$, то $(\partial^\alpha u)(0) = 0$, бо тут – тільки похідні від g (а у нас $g \equiv 0$).

(ii) якщо $\alpha_n = r + 1$: запишемо $\partial^\alpha u = \partial^\beta(\partial_{x_n} u)$, де $\beta_n = r$, і підставимо сюди диференціальне рівняння (замість $\partial_{x_n} u$). Тобто, можна виразити $(\partial^\alpha u)(0)$ в терминах похідних, які мають не більше, ніж r похідних за x_n.

Тож, можемо написати ряд Тейлора для u. Питання: чому він збігається?
Ряд Тейлора $\varphi(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x - x_0)^\alpha$, де $c_\alpha = \frac{\partial^\alpha \varphi(x_0)}{\alpha!}$, α – мультиіндекс.

Визначення

Аналітична в точці x_0 функція

$$\tilde{g}(x) = \sum_\alpha \tilde{g}_\alpha (x - x_0)^\alpha$$

є мажорантою іншої аналітичної функції мажоранта другой аналитической функции в точці x_0: $g(x) = \sum_\alpha g_\alpha (x - x_0)^\alpha$, якщо $\forall \alpha : \ |g_\alpha| \leq \tilde{g}_\alpha$.

Нехай $\tilde{A}_k$ і $\tilde{b}$ – мажоранти для A_k і b. Тоді, якщо $U(x)$ є розв'язком задачі

$$U_{x_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{A}_k(\bar{x}, U)_{x_k} + \tilde{b}(\bar{x}, U), \quad U(\overline{x}, 0) = 0,$$

кожна компонента U^i є мажорантою для u^i (випливає з того, що на кожному кроці, вираз для похідної U мажорує відповідний вираз для u.)

Теорема Коші-Ковалевської

Приклад мажоранти: Нехай $g(x) = \sum g_\alpha x^\alpha$; $a = (a_1, ..., a_n)$ – точка з області збіжності ряда, причому $|a_j| > 0$. Тоді існує $M > 0$:

$$\forall \alpha : |g_\alpha| \cdot |a_1|^{\alpha_1} \cdot ... \cdot |a_n|^{\alpha_n} \le M.$$

Нехай $a_0 = \min\{|a_1|, ..., |a_n|\}$.

Пропозиція

$\tilde{g}(x) = \frac{Ma_0}{a_0 - (x_1 + \ldots + x_n)} = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{a_0}}$ – *мажоранта для* $g(x)$.

Розкладемо у степеневий ряд (збігається в $|x_1 + ... + x_n| < a_0$):

$$\tilde{g}(x) = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + ... + x_{n-1} + x_n)^k}{a_0^k} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_0^k} \sum_{\substack{k_1 \ldots k_n \\ k = k_1 + \ldots k_n}} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{k_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| = k} \frac{Mk!}{a_0^k \alpha!} x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}_\alpha = \frac{Mk!}{a_0^k \alpha!}$$

(використано: $(x_1 + ... + x_{n-1} + x_n)^k = \sum_{k = k_1 + \ldots + k_n} \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{k_n}$).
Тут $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (мультиіндекс), $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$
З іншого боку, оцінка для $|g_\alpha|$:

$$|g_\alpha| \le \frac{M}{a_0^k} \le \left[\frac{k!}{\alpha!} \ge 1 \right] \le \frac{Mk!}{a_0^k \alpha!} = \tilde{g}_\alpha$$

Теорема Коші-Ковалевської

У паралелограмі $R((r,\dots r))$, у якому збігаються усі ряди для A_k^{ij} і b^i, можна вибрати загальну мажоранту (для всіх коефіцієнтів):

$$\tilde{A}_k^{ij}(\overline{x},u)=\tilde{b}^i(\overline{x},u):=\frac{Mr}{r-(x_1+\dots+x_{n-1}+u_1+\dots+u_m)}$$

Відповідне диференціальне рівняння для мажоранти приймає вигляд:

$$U_{x_n}^i=\frac{Mr}{r-(x_1+\dots+x_{n-1}+U^1+\dots+U^m)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}U_{x_k}^j+1\right)$$

Є розв'язок: $U^i(x)=V(x_1+..+x_n,x_n)$, якщо $V(y,t)$ – розв'язок задачі

$$V_t=\frac{Mr}{r-y-mV}(1+m(n-1)V_y),\quad V(y,0)=0\ (y\in\mathbb{R}^1,t\in\mathbb{R}^1) \tag{*}$$

У свою чергу, задача (*) розв'язується методом характеристик:

$$V(y,t)=\frac{1}{mn}\left(r-y-\sqrt{(r-y)^2-2mnMrt}\right).$$

Теорема Коші-Ковалевської

Чому побудована u розв'язує вихідну задачу?

- за конструкцією, усі $\bar{x}$ похідні дорівнюють 0, тому u задовольняє початкову умову;
- якщо вставити u до диф. рівняння (ліва частина), то отримаємо певну дійсно-аналітичну функцію в околі 0;
- за конструкцією, усі похідні у 0 дорівнюють 0; відповідно, ця дійсно-аналітична функція дорівнює 0 тотожньо, тобто, u є розв'язком диф. рівняння.
- якщо задано початкові умови у кожній точці Γ, то принцип єдиного аналітичного продовження забезпечує наявність розв'язку в околі Γ

Проблема: у застосуваннях, треба мати розв'язок у певній заданій області, а не лише в околі її межі.

ТКК забезпечує єдиність розв'язку лише у класі дійсно-аналітичних функцій.
Holmgren: для лінійних рівнянь, є теорема єдиності у класі C^1 функцій.

$$\begin{cases} v_x = -w_y \\ w_x = v_y \end{cases} \quad \text{або: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ w_y \end{pmatrix} = 0$$

Умова нехактеристичності: $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – нормаль до якої-небудь поверхні.

$$\nu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} = \nu_1^2 + \nu_1^2 \neq 0 \text{ завжди}$$

$\Rightarrow$ всі поверхні – нехарактеристичні.

Приклад застосування ТКК: рівняння Коші-Рімана

Нехай $\Gamma = \{y = 0\}$; початкові умови: $\begin{cases} v(x,0) = g(x) \\ w(x,0) = h(x) \end{cases}$.

Спробуємо шукати розв'язок згідно з ТКК, тобто шукати розв'язок у вигляді ряда Тейлора в $(0,0)$.

Для вираховування парних/непарних похідних за y, зазначимо, що

$$v_{yy} = -v_{xx}, \quad w_{yy} = -w_{xx}$$

$(v_{xx} + v_{yy} = 0,\ \text{або } \Delta v = 0; w_{xx} + w_{yy} = 0,\ \text{або } \Delta w = 0)$.

Тому

$$\partial_x^m \partial_y^n v(0,0) = \begin{cases} (-1)^k g^{(m+n)}(0), & n = 2k \\ (-1)^k h^{(m+n)}(0), & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\partial_x^m \partial_y^n w(0,0) = \begin{cases} (-1)^k h^{(m+n)}(0), & n = 2k \\ -(-1)^k g^{(m+n)}(0), & n = 2k+1 \end{cases}$$

Приклад застосування ТКК: рівняння Коші-Рімана

Ряд Тейлора для v:

$$v(x,y)=\sum_{m,n}\frac{\partial_x^m\partial_y^n v(0,0)}{m!n!}x^m y^n=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!2k!}\Big(g^{(m+2k)}(0)+$$

$$+h^{(m+2k+1)}(0)\cdot\frac{y}{2k+1}\Big)x^m y^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k!}\left(g^{(2k)}(x)+h^{(2k+1)}(x)\frac{y}{2k+1}\right)y^{2k}.$$

Більш компактно, це можна записати, використовуючи (формально) комплексну змінну:

$$v(x,y)=\frac{g(x+iy)+g(x-iy)}{2}+\frac{h(x+iy)-h(x-iy)}{2i}=Re(g(x+iy)-ih(x+iy))$$
$$=Im(h(x+iy)+ig(x+iy)).$$

(коефіцієнти в рядах для g і h – дійсні).
Аналогічно,

$$w(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!(2k)!}(h^{(m+2k)}(0)-g^{(m+2k+1)}(0)\frac{y}{2k+1})x^m y^{2k}$$
$$=Re(h(x+iy)+ig(x+iy)).$$

Це узгоджується з тим, що якщо $h(x)+ig(x)$ – значення на межі $y=0$ певної функції, аналітичної як функції $z:=x+iy$ у напівплощині $y>0$, то ця аналітична функція і є розв'язком задачі (знайти аналітичну функцію за її значеннями на межі): $u(x,y):=w+iv=h(x+iy)+ig(x+iy)$.

Умови Коші-Рімана можна трактовати як рівняння переносу з комплексною швидкістю:

$$u_x + iu_y = 0.$$

З іншого боку, якщо визначимо $z := x + iy$ і $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$, то рівняння $u_x + iu_y = 0$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} u = 0$$

(умова того, що функція u – аналітична)

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

$\begin{cases} u_t = v_x \\ u_x = v \end{cases} \quad \Rightarrow u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$ або:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Умова нехарактеристичності:

$$\nu_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_2 & 0 \\ -\nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} = \nu_2^2$$

$\Rightarrow$ якщо $\nu_2 \neq 0$, то поверхня – нехарактеристична.

Наприклад, $\Gamma = \{x = 0\}$ (тут $\nu = (0,1)$);

початкові умови: $\begin{cases} u(t,0) = g(t) \\ v(t,0) = h(t) \end{cases}$

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

Для розшуку розв'язку у вигляді ряду, зауважимо:

$$\partial_x^n u = \partial_x^{n-1} v = \partial_x^{n-2} u_t = \partial_t \partial_x^{n-2} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_x^n u(0,t) = \begin{cases} g^{(m)}(t), & n = 2m \\ h^{(m)}(t), & n = 2m+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряд Тейлора:

$$u(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(t)}{(2m+1)!} x^{2m+1} =$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{g^{(m+n)}(0)}{(2m)!n!} x^{2m} t^n + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{h^{(m+n)}(0)}{(2m+1)!n!} x^{2m+1} t^n$$

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

АЛЕ: типовою умовою для рівняння теплопровідності є **початкова умова**, тобто

$$\Gamma = \{t = 0\}; \text{ п.умова: } u(0, x) = f(x)$$

АЛЕ: ця поверхня – характеристична в кожній точці! $\Rightarrow$ ТКК не може бути застосована. ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - не має зворотної).

АЛЕ: саме рівняння дозволяє вирахувати всі похідні в $x = 0$ (наприклад), якщо задана $u(0, x) = f(x)$:
$u_t(0, 0) = u_{xx}(0, 0) = f''(0)$; $u_x(0, 0) = f'(0)$;
$u_{tx}(0, 0) = u_{xxx}(0, 0) = f'''(0)$;
$u_{tt}(0, 0) = u_{txx}(0, 0) = u_{xxxx}(0, 0) = f^{(iv)}(0), \dots$
АЛЕ: це не означає, що існує дійсно-аналітичний розв'язок: ряд може не збігатися.

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

АЛЕ: типовою умовою для рівняння теплопровідності є **початкова умова**, тобто

$$\Gamma = \{t = 0\}; \text{ п.умова: } u(0, x) = f(x)$$

АЛЕ: ця поверхня – характеристична в кожній точці! $\Rightarrow$ ТКК не може бути застосована. ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - не має зворотної).

АЛЕ: саме рівняння дозволяє вирахувати всі похідні в $x = 0$ (наприклад), якщо задана $u(0, x) = f(x)$:
$u_t(0,0) = u_{xx}(0,0) = f''(0)$; $u_x(0,0) = f'(0)$;
$u_{tx}(0,0) = u_{xxx}(0,0) = f'''(0)$;
$u_{tt}(0,0) = u_{txx}(0,0) = u_{xxxx}(0,0) = f^{(iv)}(0), \ldots$
АЛЕ: це не означає, що існує дійсно-аналітичний розв'язок: ряд може не збігатися.

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

АЛЕ: типовою умовою для рівняння теплопровідності є **початкова умова**, тобто

$$\Gamma = \{t = 0\}; \text{ п.умова: } u(0, x) = f(x)$$

АЛЕ: ця поверхня – характеристична в кожній точці! $\Rightarrow$ ТКК не може бути застосована. ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - не має зворотної).

АЛЕ: саме рівняння дозволяє вирахувати всі похідні в $x = 0$ (наприклад), якщо задана $u(0, x) = f(x)$:
$u_t(0,0) = u_{xx}(0,0) = f''(0)$; $u_x(0,0) = f'(0)$;
$u_{tx}(0,0) = u_{xxx}(0,0) = f'''(0)$;
$u_{tt}(0,0) = u_{txx}(0,0) = u_{xxxx}(0,0) = f^{(iv)}(0), \ldots$

АЛЕ: це не означає, що існує дійсно-аналітичний розв'язок: ряд може не збігатися.

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

АЛЕ: типовою умовою для рівняння теплопровідності є **початкова умова**, тобто

$$\Gamma = \{t = 0\};\ \text{п.умова: } u(0,x) = f(x)$$

АЛЕ: ця поверхня – характеристична в кожній точці! $\Rightarrow$ ТКК не може бути застосована. ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - не має зворотної).

АЛЕ: саме рівняння дозволяє вирахувати всі похідні в $x = 0$ (наприклад), якщо задана $u(0,x) = f(x)$:

$u_t(0,0) = u_{xx}(0,0) = f''(0)$; $u_x(0,0) = f'(0)$;

$u_{tx}(0,0) = u_{xxx}(0,0) = f'''(0)$;

$u_{tt}(0,0) = u_{txx}(0,0) = u_{xxxx}(0,0) = f^{(iv)}(0), \ldots$

АЛЕ: це не означає, що існує дійсно-аналітичний розв'язок: ряд може не збігатися.

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

Розв'язок у вигляді ряду Тейлора (якщо збігається!):

$$u(t,x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+2n)}}{m!n!} x^m t^n$$

Приклад 1: $f(x) = x^k$.

$$u(t,x) \equiv P_k(t,x) := \sum_{n=0}^{[k/2]} \frac{k!}{(k-2n)!n!} x^{k-2n} t^n$$

Розв'язок – поліном (**heat polynomials**).

Приклад: система рівнянь, що зводяться до рівняння теплопровідності

Приклад 2: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\begin{cases} f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)! \\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}(-t)^n$
Радіус збіжності дорівнює нулю! (ряд всюди розбігається).
! Розв'язки рівняння теплопровідності типово існують тільки для додатного часу

Приклад: система рівнянь, що зводяться до хвильового рівняння

$$\begin{cases} v_x = w_t \\ w_x = v_t \end{cases}$$

$\Rightarrow v_{tt} = v_{xx}, w_{tt} = w_{xx}$ (хвильові рівняння)

У вигляді системи рівнянь: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = 0$

Умова нехарактеристичності:

$\nu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \nu_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} = \nu_1^2 - \nu_2^2 = (\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 + \nu_2) \neq 0$

$\Rightarrow$ характеристичні прямі: $\Gamma = \{x = t\}, \Gamma = \{x = -t\}$

Приклад: система рівнянь, що зводяться до хвильового рівняння

Нехай $\Gamma = (t = 0)$ (нехарактеристична)
Початкові умови:

$$\begin{cases} v(0,x) = g(x) \\ w(0,x) = h(x) \end{cases}$$

Зв'язок між похідними за x і t – схожий на приклад з рівняннями Коші-Рімана, але без чередування знака.

$$\partial_x^m \partial_t^n v(0,0) = \begin{cases} g^{(m+n)}(0), n = 2k \\ h^{(m+n)}(0), n = 2k+1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$v(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2k)!} (g^{(m+2k)}(0) + h^{(m+2k+1)}(0) \frac{t}{2k+1}) x^m t^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(x)}{(2k)!} t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

$$= \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2} + \frac{h(x+t) - h(x-t)}{2}$$

Приклад: система рівнянь, що зводяться до хвильового рівняння

Аналогічно, $w(t,x) = \frac{g(x+t)-g(x-t)}{2} + \frac{h(x+t)+h(x-t)}{2}$
Хвильове рівняння – гіперболічне: 2 характеристичних напрямки (2 сім'ї характеристичних прямих)

———————————

У розглянутих прикладах, або не було характеристичних напрямків (**еліптична система рівнянь**), або був 1 характеристичний напрямок (**параболічна система рівнянь**), або було 2 характеристичних напрямки (**гіперболічна система рівнянь**).