Рівняння з частинними похідними - 2
Лекція 3

Викладач: Д.Г. Шепельський

ХНУ

2023

Рівняння більш високого порядку

- Питання: чи можна прилаштувати метод характеристик для рівнянь більш високого (більше, ніж першого) порядку?
- здавалось би що так, бо рівняння більш високого порядку (2,3,...) можна записати у вигляді системи рівнянь першого порядку
- але метод характеристик не працює для систем рівнянь!
- тож чи є інший метод (для початкових задач – задач Коші), який працює для систем рівнянь першого порядку?
- у випадку звичайних диф. рівнянь: теорема Пікара працює.

Квазілінійні рівняння другого порядку:

$$A_{11}(x,y)u_{xx} + 2A_{12}(x,y)u_{xy} + A_{22}(x,y)u_{yy} + b(x,y,u_x,u_y) = 0$$

- Якщо задана початкова поверхня (крива) Γ, то можна спробувати задати на ній початкові умови.
- Так как рівняння - другого порядку, можна очікувати, що треба задавати на Γ і саму функцію u, і її перші похідні.
- Але: похідні у напрямку, дотичному до Γ у відповідній точці, вираховуються зі значень u на Γ. Тож, задавати потрібно лише похідну у напрямку, нормальному (ортогональному) до Γ (і саму функцію):

  $$u|_\Gamma = g, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = h,$$

  де ν – (одинична) нормаль до Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u$ – нормальна похідна.
- У випадку рівнянь першого порядку, саме умова нехарактеристичності забезпечивала можливість вирахувати нормальну похідну з самого РЧП.
- У випадку рівнянь другого порядку: можна очікувати, що теж існують умови, за яких можна вирахувати **усі** похідні другого порядку

Рівняння другого порядку

Для дослідження питання задавання початкових умов, зручно мати пряму початкову криву.
Розпрямлення кривої – заміна координат. Якщо $\Gamma = \{(x, y) : y = \gamma(x)\}$ (або навпаки – $x = \gamma(y)$): введемо нові незалежні змінні (координати)

$$\tilde{x} = x, \qquad \tilde{y} = y - \gamma(x)$$

Тоді нова початкова крива – пряма: $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{y} = 0\}$, а РЧП у нових змінних зберігає свою форму, з коефіцієнтами

$$\tilde{A}_{11} = A_{11}, \quad \tilde{A}_{12} = A_{12} - \gamma' A_{11}, \quad \tilde{A}_{22} = A_{22} - 2\gamma' A_{12} + (\gamma')^2 A_{11}$$

Тож, без втрати загальності, можна вважати, що $\Gamma = \{(x,\ y) :\ y = 0\}$, і тоді початкові умови мають вигляд

$$u(x, 0) = g(x), \qquad u_y(x, 0) = h(x).$$

Рівняння другого порядку

Стосовно інших похідних:

$$u_x(x,0) = g'(x),$$

$$u_{xx}(x,0) = g''(x), \qquad u_{xy}(x,0) = h'(x),$$

а для $u_{yy}(x,0)$ – маємо рівняння, що походить з РЧП:

$$A_{11}(x,0)g''(x) + 2A_{12}(x,0)h'(x) + A_{22}(x,0)u_{yy}(x,0)$$

$$+b(x,0,g'(x),h(x)) = 0.$$

Тож, для того, щоб мати можливість вирахувати похідну $u_{yy}(x,0)$, необхідно, щоб

$$A_{22}(x,0) \neq 0.$$

Можна продовжити вираховувати похідні більш високого порядку, диференцюючи РЧП (якщо коефіцієнти РЧП – достатньо гладкі).

Рівняння другого порядку

- ! Умова $A_{22}(x, 0) \neq 0$ виявляється достатньою, щоб мати змогу вираховувати вищі похідні;
- тож, можна спробувати отримати розв'язок вихідної початкової задачі у вигляді ряду Тейлора у заданій точці на Γ.
- це і є стратегією **теореми Коші-Ковалевської**.

Умова $A_{22}(x, 0) \neq 0$ грає роль умови нехарактеристичності для рівняння 2-го порядку (у випадку $\Gamma = \{(x,\ y) :\ \ y = 0\}$).
Для загальної поверхні Γ: повертаючись назад, до РЧП з коефіцієтнами без тільд, умова нехарактеристичності приймає форму

$$\nu \cdot A\nu = A_{11}\nu_1^2 + 2A_{12}\nu_1\nu_2 + A_{22}\nu_2^2 \neq 0$$

ν – вектор нормалі до кривої.
Як і у випадру рівнянь першого порядку, умова нехарактеристичності залежить від точки на Γ. В силу неперервності коефіцієнтів: якщо виконується в одній точці, то виконується і у околі цієї точки.

І навпаки:

- крива Γ називається характеристикою, якщо умова нехарактеристичності не виконується всюди на Γ.

У випадку рівнянь 1-го порядку, через дану точку проходить лише одна характеристична крива. У випадку рівнянь 2-го порядку, кількість характеристичних напрямів залежить від сигнатури квадратичної форми, що асоційована з A.

- якщо A – додатно або від'ємно визначена, (дійсних) характеристичних напрямків немає; **еліптичне рівняння**
- якщо $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ має одне додатне і одне від'ємне власні значення, існує 2 характеристичних напрямка; **гіперболічне рівняння**
- якщо одне з власних значень A є 0: **параболічне рівняння**

Рівняння другого порядку

Заміна змінних: може звести РЧП до більш простої форми.
Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$A_{11}u_{xx} + 2A_{12}u_{xy} + A_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0.$$

- обертання: диагоналізує A; можна ввжали, що перше власне значення дорівнює 1
- заміна $u = e^{-b_1x/2}v$ дозволяє вилучити член з u_x
- масштабування y: друге власне значення — або ± 1 (і тоді аналогічно вилучається член з u_y), або 0, і тоді можна зробити $b_2 = -1$, $c = 0$.

Отримуємо стандартні форми:

- еліптичне рівняння $u_{xx} + u_{yy} + cu = 0$
- гіперболічне рівняння $u_{xx} - u_{yy} + cu = 0$
- параболічне рівняння $u_{xx} - u_y = 0$

Рівняння другого порядку

Спроба задавати початкові дані на характеристичній кривій веде до проблем. Розглянемо приклад:

$$u_{xy} = 0.$$

Характеристичні напрями: $(1, 0)$, $(0, 1)$. Характеристичні криві – прямі: $x = const$, $y = const$.

- Нехай початкова крива – пряма $(x, 0)$. Умови на ній: $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(y)$.
- З іншого боку, загальний розв'язок рівняння (без додаткових умов): $u(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$.
- Питання: чи допоможе задання $f(x)$ та $g(x)$ визначити конкретні $\phi(x)$ та $\psi(y)$?

$u(x,0) = \phi(x) + \psi(0) = f(x) \Rightarrow \phi(x)$ визначається за $f(x)$ з точністю до константи $\psi(0)$.
З іншого боку, $u_y(x,0) = \psi'(0) = g(y)$, звідки випливає, що:

- функцію $g(x)$ не можна задавати довільно: вона має дорівнювати константі;
- функцію $\psi(y)$ не має звідки брати. Зокрема, вже $u_{yy}(x,0)$ не можна вирахувати з даних задачі ($u_{xx}(x,0)$ вираховується з початкових умов: $u_{xx}(x,0) = f''(x)$).

Ліричний відступ

Початкові задачі (або задачі Коші) – не єдині, які має сенс ставити для РЧП. Приклад з нашої з вами історії (спектральна теорія рівняння Штурма-Ліувілля; оператори перетворення): задачі Гурса для гіперболічних рівнянь. Тут задається значення тільки самої функції на характеристиках (як ми бачили вище, задання нормальної похідної на характеристиках і неможливе довільно, і не допомагає просунутися в конструкції розв'язку). Але тут початкова крива складається з 2 характеристик, з різних сімей характеристик.

$$K_{xx}(x,y) - K_{yy}(x,y) + q(x)K(x,y) = 0, \quad x > 0, -x < y < x$$

$$K(x,x) = f(x), \qquad K(x,-x) = g(x), \quad x > 0.$$

Тут $f(x)$ і $g(x)$ можна задавати довільно (лише з умовою неперервності $f(0) = g(0)$.

Рівняння мішаного типу

Рівняння мішаного типу: змінюють тип в залежності від області.

Рівняння Трікомі:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

Рівняння для характеристичних напрямків:

$$0 = \nu \cdot A\nu = (\nu_1, \nu_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \nu_1^2 + x\nu_2^2.$$

$$\begin{cases} x < 0 : & \text{гіперболічне рівняння} \\ x > 0 : & \text{еліптичне рівняння} \\ x = 0 : & \text{параболічне рівняння} \end{cases}$$

Характеристичні лінії у гіперболічній області ($x < 0$): якщо $\gamma = (x(s), y(s))$ – характеристична, то нормальний вектор $\nu(s) = (\dot{y}(s), -\dot{x}(s))$ має задавольняти характеристичне рівняння

$$(\dot{y}(s))^2 + x(s)(\dot{x}(s))^2 = 0.$$

Або

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 = -x(s) \Rightarrow y'(x) = \pm\sqrt{-x}.$$

Звідси – дві сім'ї характеристичних кривих:

$$\xi(x,y) = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta(x,y) = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$$

Переходячи до змінних (ξ,η)): $v(\xi,\eta) := u(x,y)$,

$$v_{\xi\eta} - \frac{v_\xi - v_\eta}{6(\xi-\eta)} = 0.$$

В еліптичній області ($x < 0$), дійсних характеристик немає; але можна привести рівняння Трікомі до канонічної форми, узявши за нові координати дійсну та уявну частини "комплексних змінних"з гіперболічного випадку:

$$\xi(x, y) = y, \quad \eta(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Тоді рівняння Трикомі (в еліптичній області) набуває вигляду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{v_\eta}{3\eta} = 0.$$

Якщо змінних більше, ніж 2

Якщо змінних більше, ніж 2: більше можливостей для власних значень A. Стандартні випадки:

- всі власні значення A – одного знаку; **еліптичні рівняння**
- всі власні значення A, крім одного – одного знаку (а останнє – протилежного знаку); **гіперболічні рівняння**
- всі власні значення A, крім одного – одного знаку, а останнє дорівнює 0; **параболічні рівняння**

Загальний еліптичний диференціальний оператор:

$$Lu(x) := -\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x)\partial_{x_j x_k} u(x) + \sum_{j}^{n} b_j(x)\partial_{x_j} u(x) + c(x)u(x),$$

де $A(x)$ – додатно визначена матриця.
Еліптичні рівняння: $Lu = 0$.
Параболічні рівняння: $u_t = -Lu$.
Гіперболічні рівняння: $u_{tt} = -Lu$.
(змінна t виділена, бо відповідає багатьом застосуванням, де t – час, а інші змінні – простір).

Приклад

Задача Коші

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 2u, \qquad u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = 0.$$

- тривіальний розв'язок: $u(x,y) \equiv 0$.
- перевіримо умову нехарактеристичності:

$$\Gamma = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \nu = (0,1)$$

$$\nu \cdot A|_{(x,y)\in\Gamma} \nu = (0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

  тобто, Γ – характеристична, і тому накладені умови не виділяють єдиний розв'язок (існують нетривіальні розв'язки).

Наприклад, $u(x,y) = y^2$.