Рівняння з частинними похідними - 2
Лекція 2

Викладач: Д.Г. Шепельський

ХНУ
2023

Рівняння типу "законів збереження":

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \\ u(0,x) = g(x), \end{cases} \quad F \in C^2(\mathbb{R}) \text{ -задана функція}$$

Інша форма рівняння: $u_t + F'(u) \cdot u_x = 0$
Інтерпретація: $u(t,x)$ – щільність "чогось".
Тоді $\int\limits_a^b u(t,x)dx$ – кількість "чогось", що знаходиться у області (інтервалі) $x \in [a,b]$.
Якщо припустити, що це "щось" не може зникати або виникати (у певному місці простору) само по собі, то зміна (з часом) кількості пов'язана тільки з потоками всередину (назовні) через межу.
У нас межа – це точки $x = a$ і $x = b$; потік через межу: $v(t,a)u(t,a) - v(t,b)u(t,b)$, де v – швидкість втікання/витікання.

Метод характеристик: квазілінійні рівняння

Якщо ця швидкість є функцією щільності, то $F(u) := v(u) \cdot u$ називається потоком (flux).
Отже, закон "зміна кількості тільки за рахунок потоків" дає:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)dx = F(u(t,a)) - F(u(t,b)).$$

Змінюючи порядок диференціювання та інтегрування (зліва) та зобразивши праву частину у вигляді інтеграла від похідної (правило Ньютона), отримуємо закон збереження в **інтегральній формі**:

$$\int_a^b (u_t(t,x) + (F(u(t,x))_x)dx = 0.$$

Тепер з того, що a, b – довільні, випливає **диференціальна форма** закону збереження.
Більш загальна ситуація: $F = F(t,x,u) \Rightarrow$

$$u_t + F(t,x,u)_x = u_t + F_x(t,x,u) + F_u(t,x,u)u_x = 0.$$

Приклад. Якщо $v(u) = C = const$, то $F(u) = C \cdot u$; і закон збереження стає рівнянням переносу $u_t + Cu_x = 0$.

Метод характеристик: квазілінійні рівняння

<u>Питання:</u> чи можна застосувати метод характеристик до рівнянь виду

$$a(x, u) \cdot \nabla u = -c(x, u)$$

(коефіцієнты залежать від невідомої функції u: квазілінійне рівняння)
Характеристичні рівняння + рівняння вздовж характеристик:

$$\dot{x} = a(x, z), \quad \dot{z} = -c(x, z)$$

! на відміну від попереднього випадку: **зв'язана система рівнянь**.
Умови нехарактеристичності:

$$\nu(x)_0 \cdot a(x_0, g(x_0)) \neq 0$$

! залежать не тільки від поверхні Γ, а й від початкової умови $g(x_0)$.

Метод характеристик: квазілінійні рівняння

Теорема

Нехай $a \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, $c \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ *і нехай* $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ – $(n-1)$ *- вимірна гладка* (C^1) *поверхня, а* $g \in C^1(\Gamma)$ *– така, що виконується умова нехарактеристичності* $\nu(x_0) \cdot a(x_0, g(x_0)) \neq 0$ *у деякій точці* $x_0 \in \Gamma$.
Тоді квазілінійне рівняння

$$a(x, u) \cdot \nabla u = -c(x, u)$$

має єдиний розв'язок u *у достатньо малому околі* U_0 *точки* x_0, *який задовільняє початкову умову* $u|_\Gamma = g$. *Цей розв'язок можна отримати, розв'язуючи систему характеристичних диференціальних рівнянь*

$$\dot{x} = a(x, z), \quad \dot{z} = -c(x, z).$$

Зокрема, у випадку рівняння збереження з початковою умовою (при $t = 0$)

$$\begin{cases} u_t + F'(u)u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

маємо $\left.\begin{array}{c} a = (1, F'(u)) \\ \Gamma = (0,y), y \in \mathbb{R} \Rightarrow \nu = (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \nu \cdot a = (1,0)\cdot(1,F'(u)) = 1 \Rightarrow$
умова нехарактеристичності виконана.
Характеристичені рівняння: $t = t(s, x_0)$,$x = x(s, x_0)$, $z = z(s, x_0)$

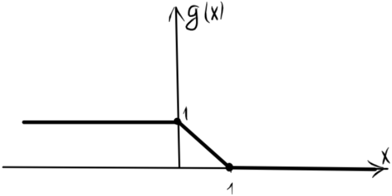
$$\begin{cases} \dot{t} = 1,\ \dot{x} = F'(z),\ \dot{z} = 0 \\ t(0) = 0,\ x(0) = x_0,\ z(0) = g(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(s) = s, \\ x(s) = x_0 + F'(g(x_0))s \\ z(s) = g(x_0) \end{cases}$$

Розв'язок РЧП (неявна форма): $u(t,x) = z(s,x_0) = g(x_0) = g(x - F'(u(t,x)t)$

! На відміну від випадку напівлінійних рівнянь, **характеристики можуть перетинатися**

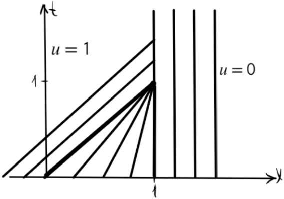
Швидкість пропорційна щільності: $F'(u) = u$, $F(u) = \frac{u^2}{2}$.
Розглянемо задачу з початковими умовами:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

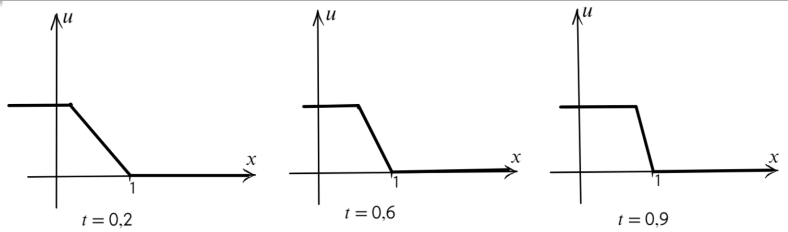


(тут початкові умови – не є гладкими, але їх можна загладити)
Характеристики: $t(s) = s$, $x(s) = x_0 + g(x_0) \cdot s$

1) $x > 1$: $u(t, x) = 0$
2) $x \le t$: $u(t, x) = 1$
3) $t < x < 1$: $u = g(x - ut) = 1 - x + ut$
$\Rightarrow u = \frac{1-x}{1-t}$

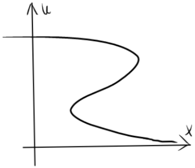


Рівняння Бюргерса: $u_t + u \cdot u_x = 0$



коли $t \to 1$, розв'язок "взривається" (blowup): похідна $\to \infty$

- гладка початкова умова: той самий ефект blowup;
- неможливо продовжити розв'язок (у класичному сенсі) за $t = 1$;
- аналітичне продовження: "багатозначні розв'язки" (перекидання хвилі)



Закони збереження: слабкі розвязки

Певні початкові умови ведуть до формування розривів у розв'язку або сингулярностей у похідних. Спостереження: розриви, після того, як сформувалися, розповсюджуються вздовж певних траєкторій. Для того, щоб надати сенс таким розв'язкам: **слабкі розв'язки**.

1. Тестові функції: гладкі, з фінітним носієм.
2. Домножити РЧП на тестову функцію; проінтегрувати по всім змінним; за допомогою інтегрування по частинах, перенести похідні з РЧП на тест. функцію (понизити порядок похідних або зовсім позбавитися похідних).
3. Поняття слабкого розв'язку: рівняння виконується для всіх тестових функцій.

Для рівнянь типу закону збереження $u_t + F(u)_x = 0$, $u(0, x) = g(x)$, тестові функції:

$$\phi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Рівняння:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u_t(t, x) + F(u(t, x))_x)\phi(t, x)dxdt = 0.$$

Інтегрування по частинах:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(t, x)\phi_t(t, x) + F(u(t, x)))\phi_x(t, x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(0, x)dx = 0.$$

За визначенням, слабкий розв'язок $u(t, x)$ – локально інтегровна функція, така, що рівняння вище виконується для всіх тестових функцій $\phi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Приклад: для рівняння переносу ($F(u) = au$), для будь-якої локально інтегровної $g(x)$, слабким розвязком є $u(t,x) = g(x - at)$ (**вправа**).

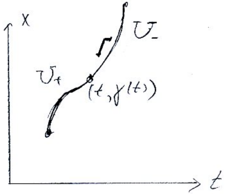
Зокрема, якщо $g(x)$ має розрив у певній точці $x = x_0$, то він, з часом, буде зміщуватися вздовж прямої $x = \gamma(t) = x_0 + at$.

Быльш загальна ситуація: припустимо, що слабкий розв'язок має розрив вздовж кривої

$$\Gamma = \{(t,x) : x = \gamma(t), t \geq t_0\}.$$

Питання: як можуть бути пов'язані значення розв'язку u_+ та u_- (з двох боків, U_+ та U_-, від Γ), значення $F(u_\pm)$ та γ?

$$u_\pm(t,\gamma(t)) = \lim_{\substack{x\to\gamma(t)\\ x\in U_\pm}} u(t,x)$$



Інтегрування по частинах у зворотньому напрямку: залишає інтеграли вздовж обох боків Γ

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\phi_t + F(u)\phi_x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(0,x)dx =$$

$$= -\int\int_{U_-} (u_t + F(u)_x)\phi dxdt - \int\int_{U_+} (u_t + F(u)_x)\phi dxdt$$

$$+ \int_{\partial U_-} (u_-\nu_1 + F(u_-)\nu_2)\phi dS + \int_{\partial U_+} (u_+\nu_1 + F(u_+)\nu_2)\phi dS$$

Тут – вектор одиничної нормалі до Γ у точці $(t, \gamma(t))$. У області гладкості розв'язку маємо $u_t + F(u)_x = 0$, тож залишиться

$$0 = \int_\Gamma ((u_+ - u_-)\nu_1 + (F(u_+) - F(u_-))\nu_2)\,\phi dS$$

звідки, в силу довільності ϕ, отримуємо **умову Rankine-Hugoniot**:

$$F(u_+) - F(u_-) = \dot\gamma(u_+ - u_-), \qquad (t,x) \in \Gamma.$$

Закони збереження: слабкі розвязки

1. Приклад з рівнянням Бюргерса $u_t + u \cdot u_x = 0$: слабкий розв'язок, отриманий вище для $0 < t < 1$, можна продовжити для $t > 1$ як розривну функцію (ударна хвиля, shock wave)

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & x < \gamma(t), \\ 0, & x > \gamma(t) \end{cases}$$

де $\gamma(t) := \frac{1+t}{2}$ (**вправа**: перевірити, що умова Rankine-Hugoniot виконується).

Закони збереження: слабкі розвязки

2. Ще один приклад з рівнянням Бюргерса, але з початковою умовою

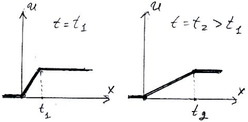
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

(a) розривний розв'язок: $\gamma(t) := \frac{t}{2}$,

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x < \gamma(t), \\ 1, & x > \gamma(t) \end{cases}$$

(б) неперервний розв'язок (для якого умова Rankine-Hugoniot є тривіальною): rarefaction wave (хвиля розрідження)

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & x > t \end{cases}$$



! для забезпечення єдиності слабкого розв'язку рівняння Бюргерса, необхідна додаткова умова

Повністю нелінійне рівняння: $F(\nabla u, u, x) = 0$

Та сама ідея: "вирахувати розв'язок вздовж характеристик" $x(s)$. Але: у систему характер. рівнянь добавляються рівняння для похідних.

$$z(s) := u(x(s)), \qquad p(s) := (\nabla u)(x(s))$$

Продиференціюємо: (1) $\dot{z} = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{x}_k$
(2) $\dot{p}_j = \sum_{k=1}^{n} u_{x_j x_k} \dot{x}_k$
Питання: як позбавитися похідних другого порядку і отримати ситему диференціальних рівнянь для (x, z, p)?
Диференціюємо РЧП за x_j:
(3) $\sum_{k=1}^{n} F_{p_k}(\nabla u, u, x) u_{x_k x_j} + F_z(\nabla u, u, x) u_{x_j} + F_{x_j}(\nabla u, u, x) = 0$
Нехай $\boxed{\dot{x}_j = F_{p_j}(p, z, x)}$ (це погоджується з $\dot{x}_j = a_j$ у напівлінійному випадку). Тоді з (2) та (3) $\Rightarrow$
$\boxed{\dot{p}_j = -F_{x_j}(p, z, x) - F_z(p, z, x) p_j}$.

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{z} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k F_{p_k}(p, z, x)}$. У рамках – шукана система рівнянь.

Відповідає: $F(t, x, u, u_t, \nabla u) = 0$, де $F(t, x, z, r, p)$ така, що $F_t = 0$, $F_z = 0$, $F_r = 1$.
Характеристичні рівняння для x і $p := \nabla_x u$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H(p, x) \\ \dot{p} = -\nabla_x H(p, x) \end{cases} \qquad \textit{гамільтонові рівняння класичної механіки}$$

(гамільтоніан H). Тут $\dot{t} = 1 \Rightarrow t = s$.
Нехай $r(s) := u_t(s, x(s))$. Тоді $\dot{r} = 0$ (з того, що $F_z = 0$ (H не залежить явно від u) і $F_t = 0$ (H не залежить явно від t)) $\Rightarrow$

$$r(t) = r(0) = u_t(0, x(0)) = -H(p(0), x(0))$$

Але $r(t) = -H(p(t), x(t)) \Rightarrow$ гамільтоніан зберігається вздовж траєкторій.
Рівняння для z:

$$\dot{z} = r \cdot 1 + p \cdot \nabla_p H$$

Теорема Якобі (обернений погляд на рівняння ГЯ та гамільтонові рівняння):
Якщо відомий розв'язок рівняння ГЯ, що залежить від n параметрів, то можна отримати розв'язки гамільтонових рівнянь .
Рівняння ейконала (геометрична оптика)

$$|\nabla u| = n(x) \;\; (n - \text{ коефіцієнт рефракції })$$

або: $\nabla u \cdot \nabla u = n^2(x)$, або: $F(\nabla u, u, x) = 0$, де
$F(p, z, x) = \frac{1}{2}(|p|^2 - n^2(x))$
Характеристики:
$\dot{x} = \nabla_p F = p$
$\dot{z} = p \cdot \nabla_p F = p \cdot p = |p|^2 = n(x)$
$\dot{p} = -\nabla_x F = n(x) \nabla n(x)$
Виключаючи p: $\ddot{x} = \frac{1}{2} \nabla(n^2(x)) \Rightarrow$ якщо $n(x) \equiv const$, то характеристики – прямі лінії.

$$u_t + H(u_x, x) = 0$$

з гамільтоніаном $H(p, x) = \frac{p^2+x^2}{2}$.
Початкові умови: $u(0, y) = g(y)(= p_0 y),\ y \in \mathbb{R}$ (y - параметр на прямій x).
Нехай $p = u_x$ і $r = u_t$. Тоді $F(t, x, z, r, p) = r + H(p, x) \Rightarrow$

$$F_t = 0, F_x = x, F_p = p,\ F_z = 0,\ F_r = 1$$

Приклад: рівняння Гамільтона-Якобі для гармонічного осцилятора II

Рівняння характеристик:

$$\begin{cases} \dot{t} = F_r = 1 \\ \dot{x} = F_p = p \\ \dot{z} = p \cdot F_p + r \cdot F_r = p^2 + r \\ \dot{r} = F_t = 0 \\ \dot{p} = -F_x = -x \end{cases}$$

початкові умови:

$$\begin{cases} t(0) = 0 \\ x(0) = y \\ z(0) = g(y) \\ r(0) = -\frac{(g'(y))^2 + y^2}{2} \\ p(0) = g'(y) \end{cases}$$

Розглянемо рівняння для x і p:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, & x(0) = y \\ \dot{p} = -x, & p(0) = g'(y) \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(s) = A \cos s + B \sin s \\ x(0) = y \\ \dot{x}(0) = -g'(y) \end{cases}$$

Розв'язок:

$$x(s) = y \cos s + g'(y) \sin s, \qquad p(s) = g'(y) \cos s - y \sin s$$

Приклад: рівняння Гамільтона-Якобі для гармонічного осцилятора III

Рівняння для t і r: $t(s) = s, r(s) = r(0)$.
Підставимо отримане у рівняння для z.

$$\begin{cases} \dot{z} = (g')^2 \cos^2 s + y^2 \sin^2 s - 2yg'(y) \sin s \cos s - \frac{(g'(y))^2 + y^2}{2} \\ z(0) = g(y) \end{cases}$$

Розв'язок:

$$z(s) = g(y) + \frac{(g'(y)^2 - y^2}{4} \sin 2s - y \cdot g'(y) \sin^2 s \quad (*)$$

Якщо $g(y) = p_0 y$: виразимо y з рівняння $x = y \cos s + p_0 \sin s$

$$y = \frac{x}{\cos t} - p_0 \operatorname{tg} t$$

Приклад: рівняння Гамільтона-Якобі для гармонічного осцилятора IV

і підставимо в (*):

$$u(t,x) = \frac{p_0 x}{\cos t} - \frac{p_0^2 + x^2}{2} \operatorname{tg} t.$$

Перевіримо початкову умову:

$$u(0,x) = p_0 x.$$