Рівняння з частинними похідними - 2

Викладач: Д.Г. Шепельський

ХНУ

2023

"Рівняння з частинними похідними" — не є уніфікованим розділом математики, а, скоріше, є сукупністю численних напрямків досліджень, кожен з яких – зі своїми джерелами задач, мотиваціями та цілями.

Ідея курсу (щонайменше, його початку) — дещо повернутися до классичних теорій, на рівні застосування математичного аналізу (функції кількох змінних; менше функціонального аналізу).

План:

1. Рівняння першого порядку. Метод характеристик.
   1. Напівлінійні рівняння
   2. Квазилінійні рівняння
   3. Слабкі розв'язки
   4. Повністю нелінійні рівняння
2. Теорема Коші-Ковалевської (системи першого порядку; рівняння другого порядку)
3. Метод розділення змінних (рівняння теплопровідності для тонкої балки; рівняння реакції-дифузії; хвильове рівняння струни; ...)

4. Перетворення Фур'є та рівняння на прямій (рівняння теплопровідності, хвильове рівняння; ...)
5. Рівняння Лапласа
6. ...
7. Операторні напівгрупи
8. Нелінійні еволюційні рівняння
9. Нелінійне рівняння Шредінгера

Література:

1. Gerald Teschl, Partial Differential Equations
2. Walter Craig, A Course on Partial Differential Equations, AMS, 2018.

Найпростіші РЧП

1. мінімальна кількість незалежних змінних — 2
2. мінімальний порядок рівняння (порядок старшої похідної) — 1
3. кількість невідомих — 1 (є ще системи рівнянь)
4. залежність від похідних та самої невідомої функції — лінійна
5. коефіцієнти рівняння — сталі (не залежать від незалежних змінних)

$$au_x + bu_y + cu = 0$$

де

$$u = u(y, x); \qquad (y, x) \in \mathbb{R}^2$$

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}; u_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Найнайпростіше РЧП

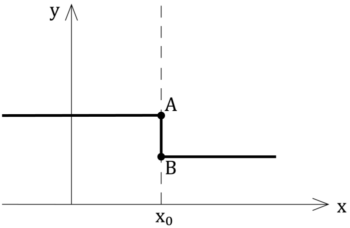
Окремий випадок: $a = 0$, $c = 0$ ($b \neq 0$):

$$u_y(y, x) = 0$$

тобто, u не залежить від y (не змінюється, якщо зафіксувати x, а y – змінювати).
Всі розв'язки: $u(y, x) = g(x)$ для довільної $g(x)$.

1. розв'язок залежить від довільної функції (у віпадку звичайного диф. рівняння, розв'язок залежить від чисел (напр., початкових умов))
2. для однозначного визначення розв'язку треба задати додаткові умови на "одновимірній множині у двовимірному просторі" (напр., на прямій чи кривій)

Напр., умова: $u(0, x) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді розв'язок – єдиний: $u(y, x) = g(x)$.
! Підійде не будь-яка крива



Крива на малюнку - не дуже гарна (для задання початкових умов для даного рівняння): на інтервалі $[A, B]$ неможливо задати u довільним чином; на ньому u має бути сталою (в силу рівняння $u_y(y, x) = 0$).

Проблема: одна з **характеристичних прямих** (прямих, вздовж яких розв'язок не змінюється), має більш ніж 1 точку перетину з кривою, на якій задається умова на розв'язок диф. рівняння.

Рівняння $u_t + au_x = 0$

Бильш загальна ситуація: $c = 0$, але $a \neq 0$.
Перепозначим зміну y: нехай вона зветься t (має сенс часу, у прикладаннях). Маємо **рівняння перенесення** (transport equation)

$$u_t + au_x = 0$$

Ліва частина – похідна за напрямком $(1, a)$.

1. $\nabla u(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ вектор градієнта
2. у нашому випадку, $\nabla u = (u_t, u_x)$
3. диф. рівняння можна записати у вигляді $(1, a) \cdot \nabla u = 0$ (скалярний додаток).

Тобто, u не змінюється, якщо рухатись (у площині (t, x)) у напрямку вектора $(1, a)$: якщо $u(t_0, x_0) = u_0$, то

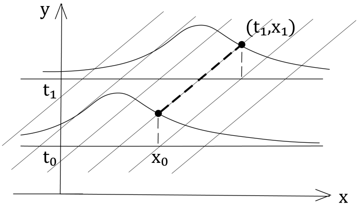
$$u(t_0 + s, x_0 + as) = u_0 \qquad \text{для всіх} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Якщо накласти умову $u(t_0, x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то для того, щоб отримати значення $u(t, x)$ для довільного t, треба "*відкрутити час назад*" вздовж характеристичної прямої, яка проходить через (t, x), доки час не стане дорівнювати t_0 (для якого заначення u задане).

$u(t, x) = u(t+s, x+as)$ задовільняє диф. рівняння для будь-якого s

$$u(t, x) = u(t+s, x+as)|_{s=t_0-t} = u(t_0, x-a(t-t_0)) = g(x-a(t-t_0)).$$

Тобто, ефект дії рівняння перенесення: задана початкова функція зміщується (переноситься) на відстань $a(t - t_0)$ (вправо, якщо $a > 0$; вліво, якщо $a < 0$).



Важливо, щоб характеристична крива, що проходить через задану точку (t, x), перетинала криву, на якій задається початкова умова, тільки в одній точці.

- Якщо не ставити початкові умови: будь-який розв'язок має вигляд $u(t,x) = \tilde{g}(x - at)$, де $\tilde{g}(x)$ – довільна функція однієї змінної.

Тепер розглянемо ситуацію з $c \neq 0$:

$$u_t + au_x + cu = 0.$$

- u вже не буде сталою функцією вздовж характеристик;
- але ми можемо знайти, як u змінюється вздовж характеристик: РЧП зведеться до звичайного диф. рівняння (ЗДР) вздовж характеристики.

Введемо функцію однієї змінної

$$z(s) := u(t + s, x + as).$$

Тоді

$$\frac{dz}{ds} = u_t + u_x \frac{\partial(x + as)}{\partial s} = u_t + au_x,$$

і ми з РЧП отримаємо ЗДР

$$\dot{z} = -cz \qquad (\dot{z} \equiv \frac{dz}{ds})$$

Розв'язок ЗДУ (залежить від початкової умови – числа $z(s_0)$):

$$z(s) = z(s_0)e^{-c(s-s_0)}$$

Знову відкручуємо час назад вздовж характеристики $(t+s, x+as)$:

$$t + s_0 = t_0 \Rightarrow s_0 = t - t_0$$

$$u(t,x) = z(0) = z(s_0)e^{cz_0} = u(t_0, x + as_0)e^{cz_0} =$$

$$= u(t_0, x - a(t-t_0))e^{-c(t-t_0)} = g(x - a(t-t_0))e^{-c(t-t_0)}$$

(нагадаємо, що $u(t_0, x) = g(x)$ (початкова умова)).
Питання: для яких (більш загальних) рівнянь можна застосовувати (узагальнюючи, за потреби) такий підхід?

- якщо c – довільна функція: $c = c(t, x, u)$ (коефіцієнт a залишається константою)

Введемо $z(s)$ аналогічним чином. Тоді ЗДР для $z(s)$ буде мати вигляд:

$$\dot{z} = -c(t+s, x+as, z)$$

(відносно незалежної змінної s; тут t та x – параметри).
Тобто задача знову зведеться до розв'язання ЗДР (але більш складного – можливо, нелінійного).

Напівлінійні рівняння

А якщо коефіцієнти при похідних – не константи?

$$a_1(x)u_{x_1} + \dots + a_n(x)u_{x_n} + c(x,u) = 0$$

Означення:

$$x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \dots, x_n);\ u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j};\ \nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

Напівлінійне рівняння:

- лінійне відносно найстарших похідних
- коефіцієнти при похідних – функції незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$
- вільний член може залежати від u та нижчих похідних

РЧП можна трактувати як задавання похідної за напрямом:

$$a(x) \cdot \nabla u = -c(x,u), \qquad a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$$

- якщо $c = 0$: **лінії рівня** для u (криві, вздовж яких u не змінюється) є дотичними до векторного поля a.

Характеристичні криві – інтегральні криві $x(s)$ векторного поля a:

$$\dot{x} = a(x)$$

(було раніше: $\left(\frac{dt}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = (1, a) \Rightarrow (t(s), x(s)) = (t_0 + s, x_0 + as)$)

- Та сама ідея: вираховувати розв'язок u вздовж характеристичних кривих
- Так само: введемо $z(s)$ як значення u вздовж характеристичної кривої
- Тоді з РЧП знову вийде ЗДР

$$\dot{z} = [\text{похідна складної функції}] = \nabla u \cdot \dot{x}(s)$$

$$= \nabla u(x(s)) \cdot a(x(s)) = [\text{РЧП}] = -c(x(s), z).$$

Напівлінійні рівняння

Початкові умови: на $n-1$-вимірній поверхні $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Gamma = \{h(y) | y \in V\}, \quad V \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{непуста відкрита множина}$$

(параметричне завдання Γ)).
Будемо припускати: $a \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $c \in C^1(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$;
$h \in C^1(V, \Gamma)$ – диференційований гомоморфізм, причому матриця Якобі $\frac{\partial h}{\partial y} := \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\right)_{i.j=1}^{n-1}$ має обернену $\forall y \in V$.
Зокрема, дотичні вектори $\frac{\partial h}{\partial y_j}$, $1 \le j \le n-1$ є лінійно незалежними.
Початкова умова: $u|_{x \in \Gamma} = g(h(y))$.

Алгоритм розв'язання:

- визначити характеристичну криву $\xi(s, y)$, яка проходить через точку $h(y)$ на Γ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x) \\ x(0, y) = h(y) \quad (\text{y}-\text{параметр для ЗДР}) \end{cases}$$

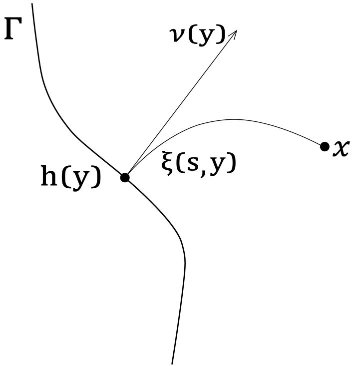
  Розв'язок: $x = \xi(s, y)$ ($a \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ за теоремою Пікара-Ліндельофа, існує щонайменше локально для s у околі 0).

- розв'язати ЗДР вздовж характеристичної кривої, з відповідною початковою умовою:

$$\begin{cases} \dot{z} = -c(\xi(s, y), z) \\ z(0) = g(h(y)) \end{cases}$$

- розв'язати (нелінійну) систему рівнянь $\xi(s, y) = x$ відносно (s, y): $s = s(x)$, $y = y(x)$ та підставити розв'язок у $u(x) = z(s, y)$.

Напівлінійні рівняння



Теорема (метод характеристик для напівлінійних рівнянь)
Нехай $a \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ і $c \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$.
Нехай $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ – гладка (C^1) $n-1$-вимірна поверхня така, що у деякій точці $x_0 \in \Gamma$ виконується умова **нехарактеристичності** поверхні:

$$\nu(x_0) \cdot a(x_0) \neq 0$$

(де $\nu(x_0)$– нормаль до Γ у точці x_0).
Тоді рівняння

$$a_1(x)u_{x_1} + \cdots + a_n(x)u_{x_n} + c(x, u) = 0$$

має єдиний розв'язок для будь-якої заданої початкової умови $g \in C^1(\Gamma \cap U_0)$, який можна отримати, слідуючи алгоритму, наведеному вище.

Доведення. По-перше зазначимо, що матриця Якобі для $\xi(s, y)$ у точці $(0, y_0)$ (де $x_0 = h(y_0)$), яка має вигляд

$$\frac{\partial \xi}{\partial(s, y)}(0, y_0) = \left(a(x_0), \frac{\partial h}{\partial y_1}(y_0), \ldots, \frac{\partial h}{\partial y_{n-1}}(y_0) \right)$$

має обернену в силу нехаректеристичної умови. Тому, в силу теореми про обернену функцію, $\xi(s, y)$ є дифеоморфізмом у околі $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V(y_0) \mapsto U(x_0)$. Геометрично: характеристична крива не повинна "залишатися" на Γ.

Отож, для будь-якого $x \in U(x_0)$ можна знайти відповідну $(s, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(y_0)$ таку, що характеристична крива $\xi(\cdot, y)$ починається у $h(y) \in \Gamma$ і досягає $x = \xi(s, y)$.

Далі,
$u = z(s(x), y(x)) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$
Треба довести, що

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot a_i(x) = \frac{dz}{ds}(s(x), y(x)) \qquad (*)$$

(бо вже маємо $\dot{z} = -c$). Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot a_i(x) = \frac{dz}{ds} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} a_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i =$$

$$= \frac{dz}{ds} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} a_i + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i.$$

(*) буде доведено, якщо ми покажемо, що:
(i) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} a_i = 1$;
(ii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i = 0$ для всіх $j = 1, \dots, n-1$.

Напівлінійні рівняння

Зазначимо, що $\frac{\partial s}{\partial x_i}$, $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ є елементами матриці Якобі $\frac{\partial(s,y)}{\partial x}$. Але ця матриця є оберненою до матриці Якобі $\frac{\partial x}{\partial(s,y)}$, яка має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial(s,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s} & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Відповідно, $\frac{\partial(s,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial(s,y)} = I_n$ (одинична матриця); тобто,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} & \frac{\partial s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

звідки (i) елемент (11): $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} a_i = 1$;

(ii) елементи $(21), \ldots, (n1)$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i = 0$ для $j = 1, \ldots, n-1$.

$$\begin{cases} u_{x_1} + x_1 u_{x_2} + x_1 u = 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u(y, y^2) = 1 \end{cases}$$

Тобто тут $a(x) = (1, x_1)$,
$\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\} = \{x_1 = y, x_2 = y^2\}$.
Вектор нормалі: $\nu(y, y^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_2 - x_1^2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_2 - x_1^2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} |_{x_1 = y, x_2 = y^2} =$
$\begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} |_{x_1 = y, x_2 = y^2} = \begin{pmatrix} -2y \\ 1 \end{pmatrix}$
Перевірка нехарактеристичності Γ:

$\nu(y, y^2) \cdot a(y, y^2) = (-2y, 1) \cdot (1, y) = -2y + y = -y \neq 0$, якщо $y \neq 0$.

Напівлінійні рівняння: приклад 1

(i) Рівняння для характеристичних кривих:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{ds} = 1, & \frac{dx_2}{ds} = x_1 \\ x_1(0) = y, & x_2(0) = y^2 \end{cases}$$

Розв'язок: $x_1 = \xi_1(y,s)$, $x_2 = \xi_2(y,s)$, де

$$\xi_1(y,s) = y + s, \quad \xi_2(y,s) = y^2 + \int_0^s (y + s')ds' = y^2 + ys + \frac{s^2}{2}$$

(ii) ЗДР вздовж характеристичної кривої:

$$\frac{dz}{ds} = -x_1 z; \quad z(0) = 1$$

(з початкової умови). Розв'язок:

$$z(s) = e^{-\int_0^s (y+s')ds'} = e^{-ys - \frac{s^2}{2}}.$$

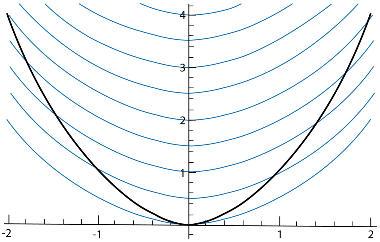
Розв'язок РЧП: $u(x) = z(s,y)|_{s=s(x), y=y(x)}$.

(iii) Виразимо s і y через $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{cases} y + s = x_1 \\ y^2 + ys + \frac{s^2}{2} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x_1 - s \\ (x_1 - s)^2 + (x_1 - s)s + \frac{s^2}{2} = x_2 \end{array}$$

Друге рівняння – квадратне відносно s. Його розв'язок: $s = x_1 \pm \sqrt{2x_2 - x_1^2}$. Тоді з першого рівняння: $y = \mp\sqrt{2x_2 - x_1^2} \Rightarrow -ys - \frac{s^2}{2} = x_2 - x_1^2$. Підставляємо у вираз для $z(s)$:

$$u(x) = e^{-ys - \frac{s^2}{2}} = e^{x_2 - x_1^2}$$



Зауваження.

(1) Дійсні характеристики – тільки в області $x_2 \geq \frac{x_1^2}{2}$. З іншого боку, отримана формула дає розв'язок РЧП для всіх (x_1, x_2).

(2) Характеристики перетинають Г двічі $\Rightarrow$ проблематично задавати умови у обох точках перетину.

Напівлінійні рівняння: приклад 1

Наприклад, якщо задати умову $u(y, y^2) = y$ на $\Gamma_+ = \Gamma \cap \{x_1 > 0\}$, то розв'язок –

$$u_+(x) = \sqrt{2x_2 - x_1^2} e^{x_2 - x_1^2},$$

а якщо задати умову $u(y, y^2) = y$ на $\Gamma_- = \Gamma \cap \{x_1 < 0\}$, то розв'язок –

$$u_+(x) = -\sqrt{2x_2 - x_1^2} e^{x_2 - x_1^2}$$

(в області $x_2 \geq x_1^2/2$).

Приклад 2: рівняння Ліувілля

$$u_t + v u_x + \frac{1}{m} F(x) u_v = 0,$$

$$u(0, x, v) = g(x, v),$$

де $u(t, x, v)$ – щільність ансамбля ідентичник частинок маси m у фазовому просторі $(x, v) \in \mathbb{R}^2$ (координата та швидкість). Характеристичні рівняння

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = \frac{1}{m} F(x), \quad \dot{z} = 0.$$

Тобто, щільність не змінюється вздовж траєкторій індивідуальних частинок, що задаються другим законом Ньютона

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Отже,

- метод характеристик зводить РЧП до системи ЗДР
- якщо ми можемо розв'язати цю систему, то отримуємо розв'язок РЧП у неявній формі
- якщо ми можемо розв'язати відповідну (нелінійну) систему рівнянь, то отримуємо розв'язок РЧП у явній формі
- отримуємо, взагалі кажучи, локальний розв'язок; але це не повинно дивувати, бо ЗДР теж не мають, у звагальній ситуації, глобальних розв'язків
- навіть якщо система ЗДР має глобальний розв'язок, метод характеристик може "не дотягуватись" до всіх точок