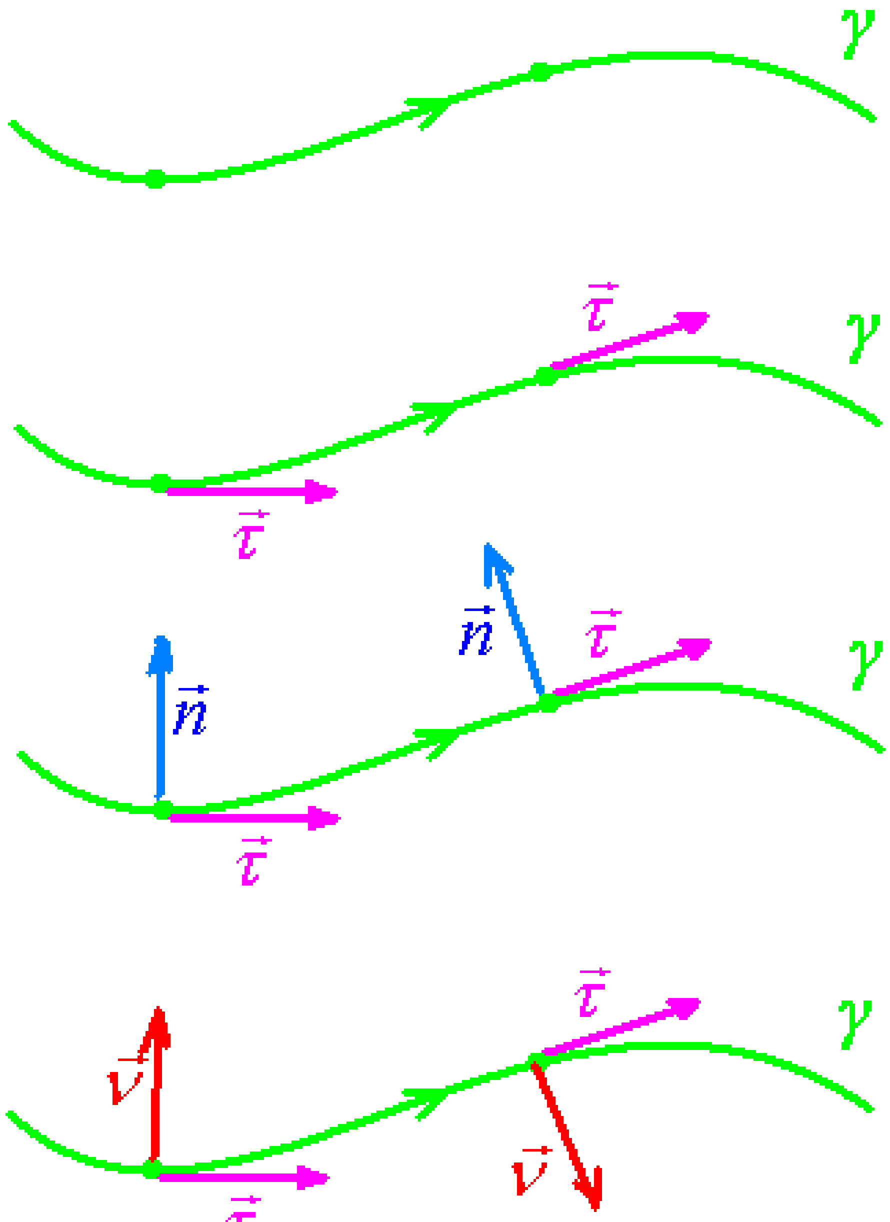
Задача 1. Розглянемо параметрично задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$ і точку P на цій кривій. Знайдіть вектори базису Френе в довільній точці кривої γ. Запишіть рівняння дотичної та нормальної прямих кривої γ в точці P:

0) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=t_0)$

1) $\begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=0)$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=\ln 2)$

3) $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t=t_0)$

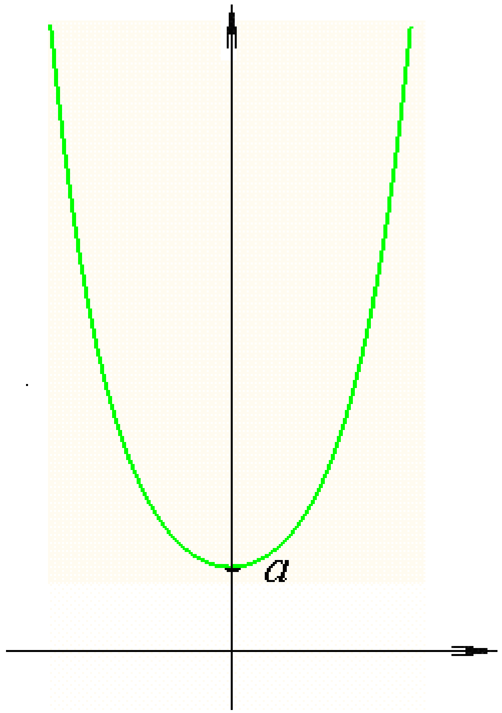


γ
$\vec{\tau}$
γ
$\vec{\tau}$
$\vec{n}$
$\vec{\tau}$
γ
$\vec{n}$
$\vec{\tau}$
$\vec{\tau}$
γ
$\vec{\nu}$
$\vec{\nu}$
$\vec{\tau}$

Розв'язання. Розглянемо параметрично задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Це ланцюгова лінія.



Запишемо її радіус-вектор:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} at \\ a\cosh t \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу похідну

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ a\sinh t \end{pmatrix},$$

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = a\cosh t.$$

Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq \overline{0}$, то задана крива є регулярною.

Запишемо одиничний дотичний вектор:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{a\cosh t}\begin{pmatrix} a \\ a\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$$

Запишемо ортогональній йому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ так, щоб вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ утворювали додатно орієнтований базис в площині:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\tanh t \\ \frac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$$

Вектор головної нормалі $\vec{\nu}$ співпадає або з $\vec{n}$, або з $-\vec{n}$. Щоб правильно обрати, згадаємо, що векторі $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$ задають в площині таку ж орієнтацію, як і вектори $\vec{f}'$ і $\vec{f}''$. Маємо

$$[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a\sinh t & a\cosh t \end{vmatrix} = a^2 \cosh t > 0$$

Значить $\vec{f}'$ і $\vec{f}''$ задають в площині додатну орієнтацію. Як наслідок, $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$ теж задають в площині додатну орієнтацію, як і $\vec{f}'$ і $\vec{f}''$.

Отже, можемо зробити висновок, що $\vec{\nu} = \vec{n}$, тобто,

$$\vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\tanh t \\ \dfrac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$$

Таким чином, ми визначили вектори базису Френе $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$.

Запишемо рівняння дотичної і нормальної прямих кривої γ в точці $P(t=\ln 2)$. Маємо:

радіус-вектор точки P

$$\vec{f}(\ln 2) = \begin{pmatrix} a\ln 2 \\ a\cosh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ln 2 \\ \frac{5}{4}a \end{pmatrix}$$

напрямний вектор дотичної прямої

$$\vec{\tau}(\ln 2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh(\ln 2)} \\ \tanh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

напрямний вектор нормальної прямої

$$\vec{\nu}(\ln 2) = \begin{pmatrix} -\tanh(\ln 2) \\ \dfrac{1}{\cosh(\ln 2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Рівняння дотичної прямої в точці P:
$$\frac{x^1 - a\ln 2}{\frac{4}{5}} = \frac{x^2 - \frac{5}{4}a}{\frac{3}{5}} .$$

Рівняння нормальної прямої в точці P:
$$\frac{x^1 - a\ln 2}{-\frac{3}{5}} = \frac{x^2 - \frac{5}{4}a}{\frac{4}{5}} .$$

Відповідь: Базис Френе $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$, $\vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\tanh t \\ \dfrac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$.

Рівняння дотичної прямої в точці P:
$$3x^1 - 4x^2 + 5a - 3a\ln 2 = 0 .$$

Рівняння нормальної прямої в точці P:
$$4x^1 + 3x^2 - 4a\ln 2 - \frac{15}{4}a = 0$$

Задача 2.1. Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$:

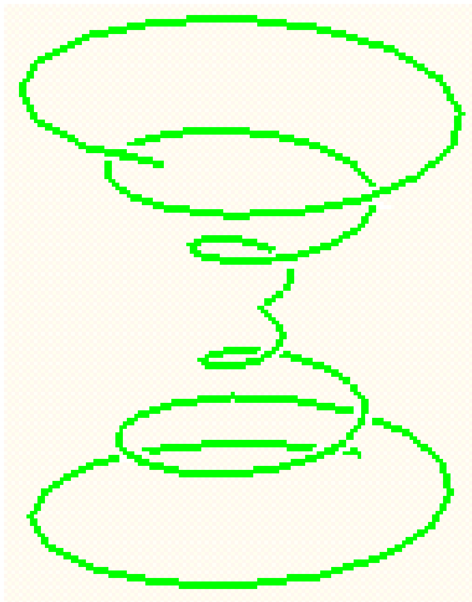
$$\begin{cases} x^1 = t\cos t \\ x^2 = t\sin t, \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ.

Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої γ в точці $t=\pi$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$



Обчислимо першу і другу похідні

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ h \end{pmatrix}, \qquad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$, крива є регулярною.

Оскільки

, $$[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{pmatrix} -h(2\cos t - t\sin t) \\ -h(2\sin t + t\cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

в кожній точці на кривій визначається тригранник Френе і базис Френе.

Маємо:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{pmatrix} -h(2\cos t - t\sin t) \\ -h(2\sin t + t\cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}] = \begin{pmatrix} -(t^2+2)(\sin t + t\cos t) - h^2(2\sin t + t\cos t) \\ (t^2+2)(\cos t - t\sin t) + h^2(2\cos t - t\sin t) \\ -th \end{pmatrix},$$

Далі, обчислюємо:

$$|\vec{T}| = \sqrt{t^2 + h^2 + 1}, \ |\vec{B}| = \sqrt{(t^2+2)(t^2+h^2+2) + 2h^2},$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{t^2 + h^2 + 1}\sqrt{(t^2+2)(t^2+h^2+2) + 2h^2}$$

Записуємо вектори базису Френе:

$$\tau = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 1}\sqrt{(t^2+2)(t^2+h^2+2)+2h^2}} \begin{pmatrix} -(t^2+2)(\sin t + t\cos t) - h^2(2\sin t + t\cos t) \\ (t^2+2)(\cos t - t\sin t) + h^2(2\cos t - t\sin t) \\ -th \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{(t^2+2)(t^2+h^2+2)+2h^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h(2\cos t - t\sin t) \\ -h(2\sin t + t\cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

В точці $t=\pi$ маємо: $$\vec{f}(\pi)=\begin{pmatrix}-\pi\\0\\h\pi\end{pmatrix},$$

$$\vec{T}(\pi)=\begin{pmatrix}-1\\-\pi\\h\end{pmatrix},\quad \vec{V}(\pi)=\begin{pmatrix}\pi(\pi^2+2)+\pi h^2\\-\pi^2-2-2h^2\\-\pi h\end{pmatrix},\quad \vec{B}(\pi)=\begin{pmatrix}2h\\\pi h\\\pi^2+2\end{pmatrix}.$$

Рівняння дотичної прямої в точці P:

$$\frac{x^1+\pi}{-1}=\frac{x^2}{-\pi}=\frac{x^3-h\pi}{h}$$

Рівняння головної нормалі в точці P:

$$\frac{x^1+\pi}{\pi(\pi^2+2+h^2)}=\frac{x^2}{-\pi^2-2-2h^2}=\frac{x^3-h\pi}{-\pi h}$$

Рівняння бінормалі в точці P:

$$\frac{x^1+\pi}{2h}=\frac{x^2}{\pi h}=\frac{x^3-h\pi}{\pi^2+2}$$

Рівняння нормальної площини в точці P:

$$-1(x^1+\pi)-\pi x^2+h(x^3-h\pi)=0$$

Рівняння спрямної площини в точці P:

$$\pi(\pi^2+2+h^2)(x^1+\pi)-(\pi^2+2+2h^2)x^2-\pi h(x^3-h\pi)=0$$

Рівняння щільнодотичної площини в точці P:

$$2h(x^1+\pi)+\pi hx^2+(\pi^2+2)(x^3-h\pi)=0$$

***Задача 3.**

1) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $I\!R^n$ проходять через фіксовану точку O, то крива γ є прямою.

Ідея доведення:

$$\vec{x} = \vec{f}(t)$$

$$\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t)$$

$$\exists \lambda = \lambda(t): \ \ \vec{f}(t) + \lambda(t) \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t) = 0$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = -\frac{1}{\lambda(t)} \cdot \vec{f}(t)$$

$$\vec{f}(t) = \Lambda(t) \cdot \vec{C}$$

2) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $I\!R^n$ є паралельними деякій фіксованій прямій, то крива γ є прямою.

Ідея доведення:

$$\vec{x} = \vec{f}(t)$$

$$\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t)$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$$

$$\vec{f}(t) = \Lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{f}_0$$

3) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі нормальні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в $I\!R^2$ проходять через фіксовану точку, то крива γ є колом.

Ідея доведення:

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) - \lambda \dfrac{df^2}{dt}(t) \\ x^2 = f^2(t) + \lambda \dfrac{df^1}{dt}(t) \end{cases}$$

$$\exists \lambda = \lambda(t): \begin{cases} f^1(t) - \lambda(t) \dfrac{df^2}{dt}(t) = 0 \\ f^2(t) + \lambda(t) \dfrac{df^1}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{df^1}{dt}(t) = -\dfrac{1}{\lambda(t)} f^2(t) \\ \dfrac{df^2}{dt}(t) = \dfrac{1}{\lambda(t)} f^1(t) \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\lambda(t)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{df^1}{d\sigma}(\sigma) = -f^2(\sigma) \\ \dfrac{df^2}{d\sigma}(\sigma) = f^1(\sigma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f^1}{d\sigma^2} = -f^1 \\ \dfrac{d^2 f^2}{d\sigma^2} = -f^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^1 = b\cos\sigma - a\sin\sigma \\ f^2 = a\cos\sigma + b\sin\sigma \end{cases}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} b\cos\sigma - a\sin\sigma \\ a\cos\sigma + b\sin\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\cos\sigma + \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}\sin\sigma$$

Кривина і скрут

Задача 1. Знайти кривину еліпса

$$\begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix},\ \vec{f}' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix},\ \vec{f}'' = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$[\vec{f}', \vec{f}''] = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix} = ab$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t})^3}$$

Задача 2. Знайти кривину і скрут гвинтової лінії

$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \ \vec{f}' = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \ \vec{f}'' = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}''' = \begin{pmatrix} r\sin t \\ -r\cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$[\vec{f}', \vec{f}''] = \begin{pmatrix} hr\sin t \\ -hr\cos t \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad |[\vec{f}', \vec{f}'']| = r\sqrt{r^2 + h^2} \ ,$$

$$(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''') = \begin{vmatrix} -r\sin t & -r\cos t & r\sin t \\ r\cos t & -r\sin t & -r\cos t \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = hr^2$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{r\sqrt{r^2+h^2}}{(\sqrt{r^2+h^2})^3} = \frac{r}{r^2+h^2}$$

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2} = \frac{hr^2}{(r\sqrt{r^2+h^2})^2} = \frac{h}{r^2+h^2}$$

Відповідь: $k = \dfrac{r}{r^2+h^2}$, $\kappa = \dfrac{h}{r^2+h^2}$

Задача 3. Доведіть, що кривина і скрут не залежать від розташування кривої в просторі.

Доведення. Рух в просторі описується наступним чином:

$$\vec{y} = W\vec{x} + \vec{c}, \qquad W \in O(n).$$

Візьмемо криву з радіус-вектором $\vec{f}(t)$, застосуємо рух в просторі, отримаємо криву з радіус-вектором

$$\vec{g}(t) = W\vec{f}(t) + \vec{c}$$

Маємо:

$$\vec{g}' = W\vec{f}', \quad \vec{g}'' = W\vec{f}'', \quad \vec{g}''' = W\vec{f}'''$$

$$|\vec{g}'| = |\vec{f}'|,$$

$$[\vec{g}', \vec{g}''] = W[\vec{f}', \vec{f}''], \quad |[\vec{g}', \vec{g}'']| = |[\vec{f}', \vec{f}'']|,$$

$$(\vec{g}', \vec{g}'', \vec{g}''') = (\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')$$

$$k_g = \frac{|[\vec{g}', \vec{g}'']|}{|\vec{g}'|^3} = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = k_f, \quad \kappa_g = \frac{(\vec{g}', \vec{g}'', \vec{g}''')}{|[\vec{g}', \vec{g}'']|^2} = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2} = \kappa_f$$

Задача 4. Проаналізуйте, як змінюються кривина і скрут під дією гомотетії в просторі.

Задача 5. Проаналізуйте, як змінюються кривина і скрут при зміні орієнтації кривої.

Задача 7.1h. Знайдемо кривину та скрут гвинтової лінії

$$r = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt).$$

Згадаймо, що

$$r' = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b),$$
$$|r'| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$r'' = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0),$$
$$[r', r''] = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)$$

і

$$|[r', r'']| = a\sqrt{a^2+b^2}$$

при $a > 0$. Тоді за формулою з лекцій кривина дорівнює

$$k = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Зауважимо, що кривина існує лише на проміжках, де крива регулярна, тобто $r' \neq 0$. Для обчислення скруту (кручення) нам також знадобляться

$$r''' = (x''', y''', z''') = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

та змішаний добуток

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b$$

(це можна було знайти і як скалярний добуток $\langle [r', r''], r''' \rangle$). Тоді за формулою скрут дорівнює

$$\varkappa = \frac{(r', r'', r''')}{|[r', r'']|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Скрут існує лише за умови $[r', r''] \neq 0$, тобто ненульової кривини на проміжку (також це умова визначеності репера та тригранника Френе). Також зауважимо, що кривина просторової кривої завжди невід'ємна, а скрут може приймати значення будь-якого знаку.

У випадку, коли параметр кривої є натуральним, можна скористатися спрощеними формулами. Згадаємо, що для гвинтової лінії одна з натуральних параметризацій має вигляд

$$r = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Тоді

$$r' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b),$$
$$r'' = \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0),$$

і за формулою для натуральної параметризації

$$k = |r''| = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Крім того,

$$[r', r''] = \frac{1}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}(ab\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -ab\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a^2)$$

$$r''' = \frac{1}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}(a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0),$$

тому

$$(r', r'', r''') = \langle [r', r''], r''' \rangle = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^3}.$$

За формулою для натурального параметра,

$$\varkappa = \frac{(r', r'', r''')}{k^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Задача 7.6а. Треба показати, що просторова крива

$$r = (\cos t,\ \sin t,\ \cos t + \sin t)$$

є пласкою та знайти рівняння площини, у якій вона лежить. Звичайно, цю задачу можна розв'язати, просто помітивши, що крива лежить у площині $x+y-z=0$. Але ми розберемо "правильний" алгоритм її розв'язку. Перш за все, згадаємо, що крива, у якої визначений скрут, є пласкою тоді й тільки тоді, коли він нульовий (це твердження з лекцій, але ми перевіряли його безпосередньо: воно випливає з задачі 1.7 та формули для скруту). У нашому випадку

$$r' = (-\sin t,\ \cos t,\ -\sin t + \cos t),$$

$$r'' = (-\cos t,\ -\sin t,\ -\cos t - \sin t),$$

$$r''' = (\sin t,\ -\cos t,\ \sin t - \cos t).$$

Тому числівник у формулі для скруту

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t + \cos t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t - \sin t \\ \sin t & -\cos t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, крива дійсно пласка. Тоді площина, у якій вона лежить, – це її щільнодотична площина. Оскільки вектор нормалі цієї площини дорівнює

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & -\sin t + \cos t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t - \sin t \end{vmatrix} = (-1,\ -1,\ 1),$$

вона повинна мати рівняння

$$-(x - \cos t) - (y - \sin t) + (z - \sin t - \cos t) = 0,$$

тобто якраз

$$x + y - z = 0.$$

Задача 7.8. Перевіримо, що якщо всі щільнодотичні площини деякої просторової кривої перпендикулярні деякій прямій (або, що те ж саме, усі паралельні одна одній), то ця крива пласка. Знову спробуємо показати, що у такої кривої скрут дорівнює нулю. Нехай a – (постійний) напрямний вектор даної прямої, який, таким чином, є вектором нормалі кожної щільнодотичної площини. Оскільки ці площини паралельні векторам r' і r'', де r – вектор-функція, що задає криву, умова задачі означає, що

$$\langle r', a \rangle = 0,\ \langle r'', a \rangle = 0.$$

Продиференціювавши другу з цих умов, отримаємо

$$\langle r''', a \rangle = 0,$$

тобто вектори r', r'' та r''' ортогональні одному й тому самому вектору, а отже компланарні. Тому числівник у формулі для скруту $(r', r'', r''') = 0$, що і означає, що крива пласка. Ще один спосіб це побачити – використати формули Френе, з якими ми будемо працювати наступного разу.

Твердження, що обернене до твердження задачі, теж, очевидно, вірне: у цьому випадку щільнодотична площина у кожній точці – це і є площина кривої. Приклад цього ми бачили у попередній задачі. Зауважимо також, що з умови $\langle r', a \rangle = 0$ випливає $\langle r'', a \rangle = 0$. Таким чином, нам би вистачило і першої з них: вона означає, що усі дотичні до кривої перпендикулярні деякій прямій, і формально слабша за умову задачі (хоча насправді їй еквівалентна).