gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 4. Репер Френе регулярної кривої.

4.1. Базис Френе регулярної кривої в $I\!R^2$

Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

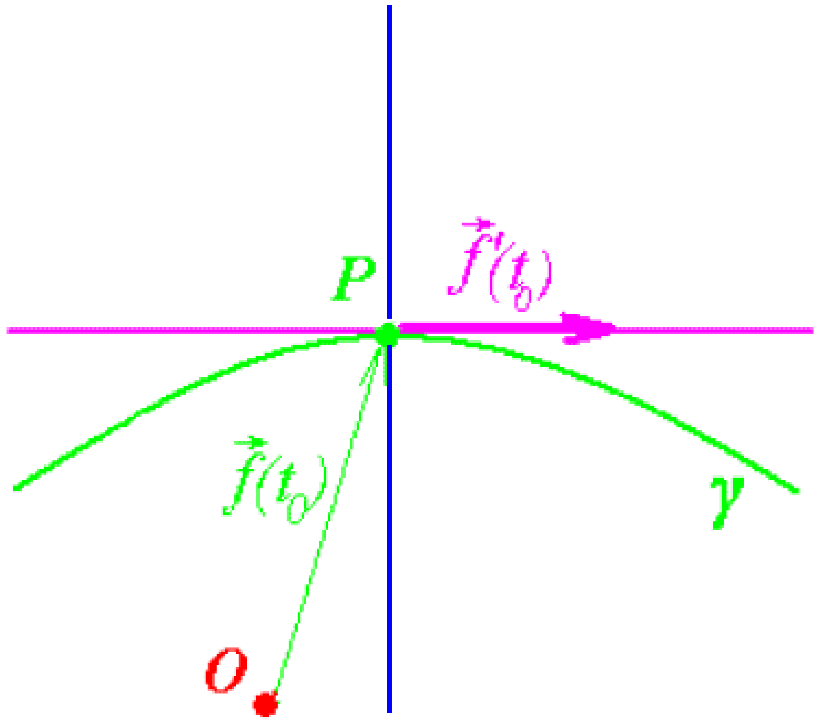
$$1) \ \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$$

$$2) \ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0 .$$

В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ:

1) існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$

2) існує і є єдиною *нормальна пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ ортогонально до дотичної прямої, вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ є її вектором нормалі



В координатній формі:

крива γ

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \end{cases}$$

дотична пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}$$

нормальна пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

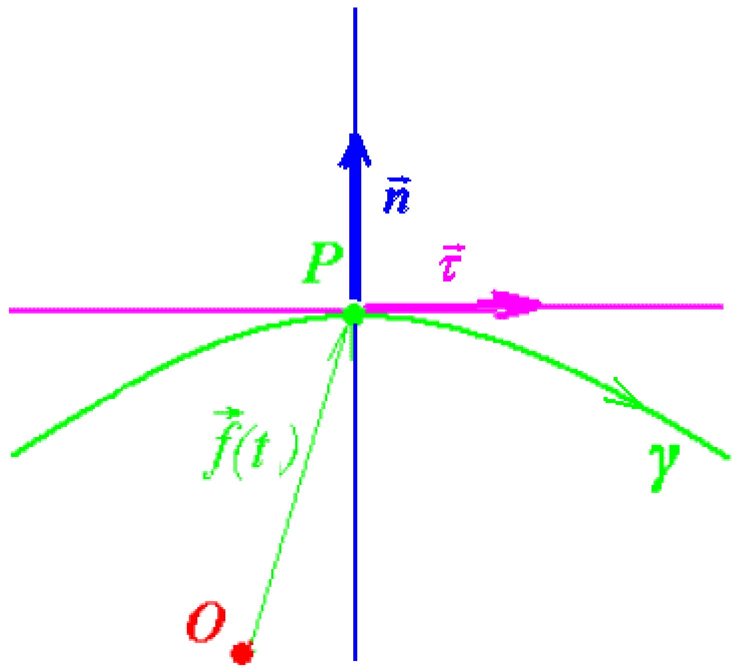
$$\frac{df^1}{dt}(t_0)\cdot(x^1 - f^1(t_0)) + \frac{df^2}{dt}(t_0)\cdot(x^2 - f^2(t_0)) = 0$$

В кожній точці P на регулярній кривій γ в $I\!R^2$ визначаються одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$ і одиничний нормальний вектор $\vec{n}$:

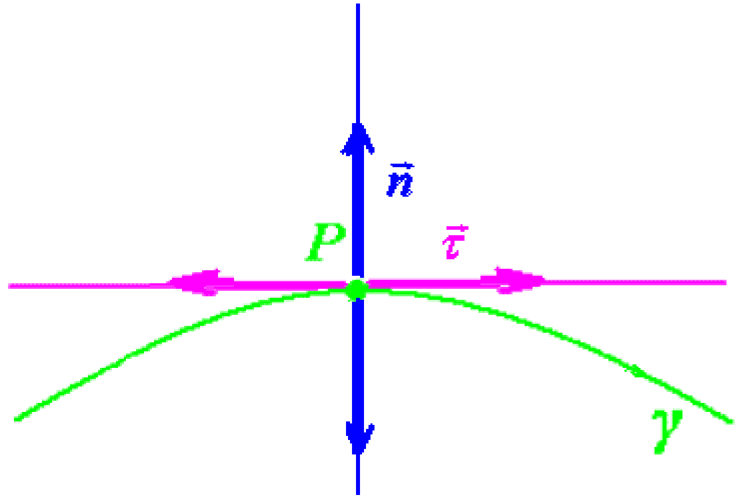
$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \frac{df^2}{dt} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{df^1}{dt})^2 + (\frac{df^2}{dt})^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{df^2}{dt} \\ \frac{df^1}{dt} \end{pmatrix}$$

Разом вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$, прив'язані до точки P, утворюють ортонормований додатно орієнтований базис в площині $I\!R^2$:

$$<\vec{\tau},\vec{\tau}> \equiv 1 \,, \; <\vec{\tau},\vec{n}> \equiv 0 \,, \; <\vec{n},\vec{n}> \equiv 1 \,.$$



Зауваження 1. В кожній точці P на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ визначаються однозначно з точністю до знаку.

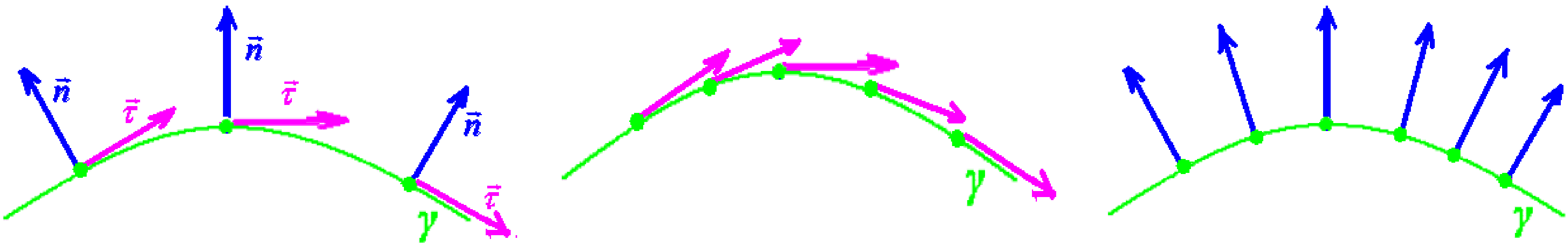


Якщо задано орієнтацію (напрямок руху) на кривій, то вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ визначаються однозначно.

При зміні орієнтації (напрямку руху) на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ змінюють знак.

Зауваження 2. Коли точка P рухається по кривій γ, вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ змінюються неперервно, при цьому їх ортонормованість зберігається.

Термінологія: *рухомий ортонормований базис* вздовж кривої γ,
дотичне векторне поле $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$ вздовж кривої γ,
нормальне векторне поле $\vec{n} = \vec{n}(t)$ вздовж кривої γ.



При відповідному виборі знаків вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ утворюють ортонормований базис в $\mathbb{R}^2$, який називається *базисом Френе* вздовж кривої γ.

4.2. Базис Френе регулярної кривої в $I\!R^3$

Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

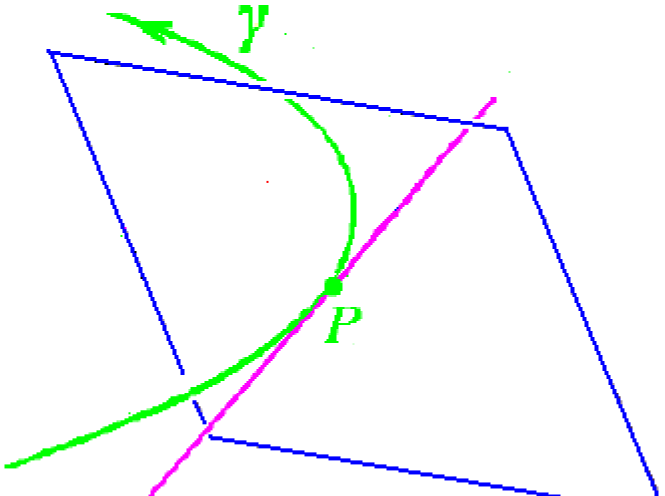
$$1) \ \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 2$$

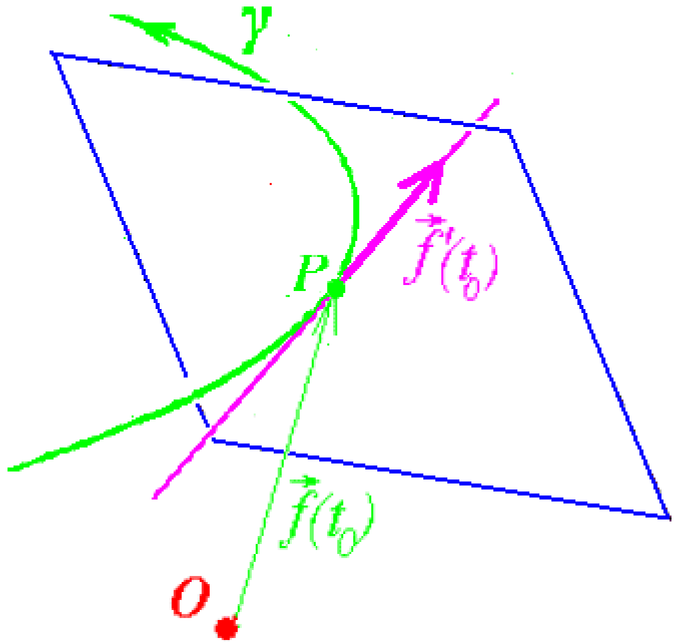
$$2) \ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0 .$$

В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ:

1) існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$

2) існує і є єдиною *нормальна площина* – вона проходить через точку $P(t_0)$ ортогонально до дотичної прямої, вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ є її вектором нормалі





В координатній формі:

крива γ

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \\ x^3 = f^3(t) \end{cases}$$

дотична пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

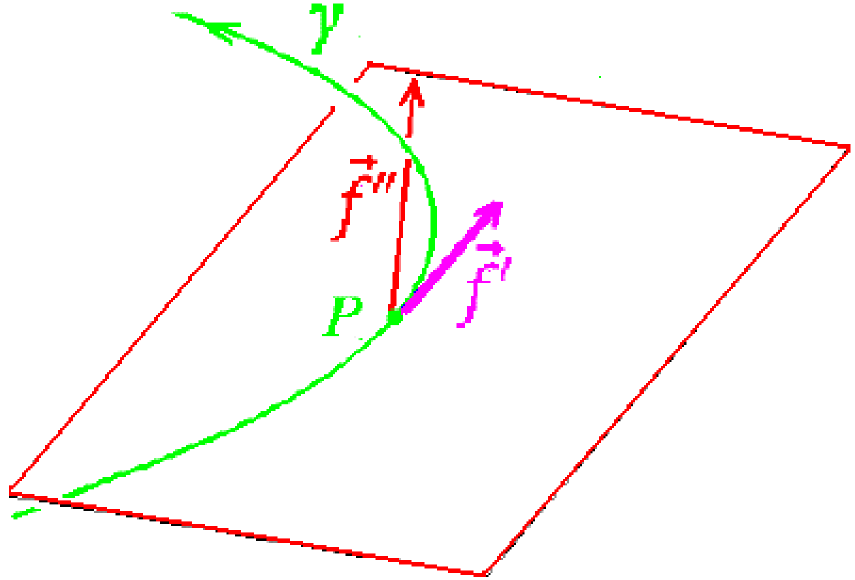
$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} = \frac{x^3 - f^3(t_0)}{\frac{df^3}{dt}(t_0)}$$

нормальна пряма кривої γ в точці $P(t_0)$

$$\frac{df^1}{dt}(t_0)\cdot(x^1 - f^1(t_0)) + \frac{df^2}{dt}(t_0)\cdot(x^2 - f^2(t_0)) + \frac{df^3}{dt}(t_0)\cdot(x^3 - f^3(t_0)) = 0$$

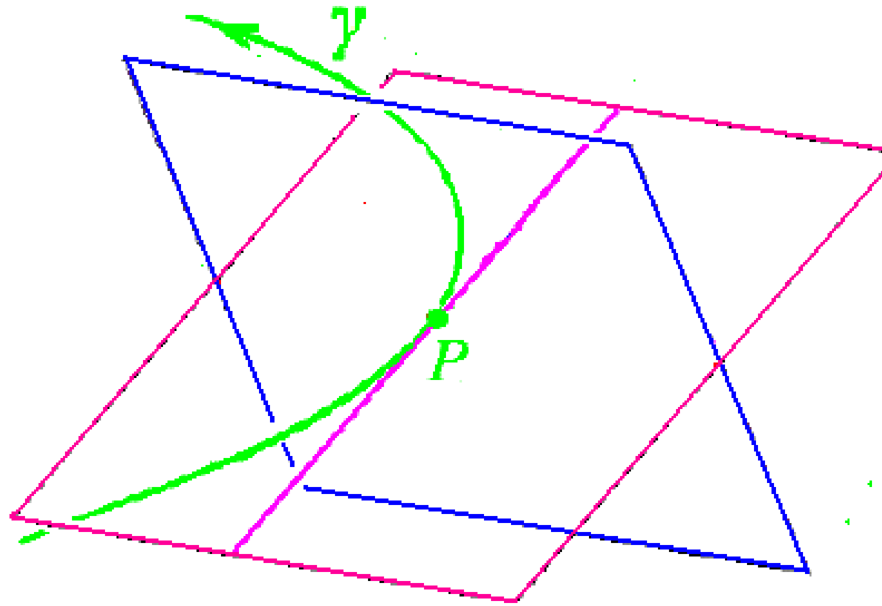
Нехай в точці $P(t_0)$ на кривій γ вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$ є лінійно незалежними, $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$.

Тоді в точці P існує і є єдиною *щільнодотична* площина кривої γ – вона проходить через точку P і натягнута на вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$

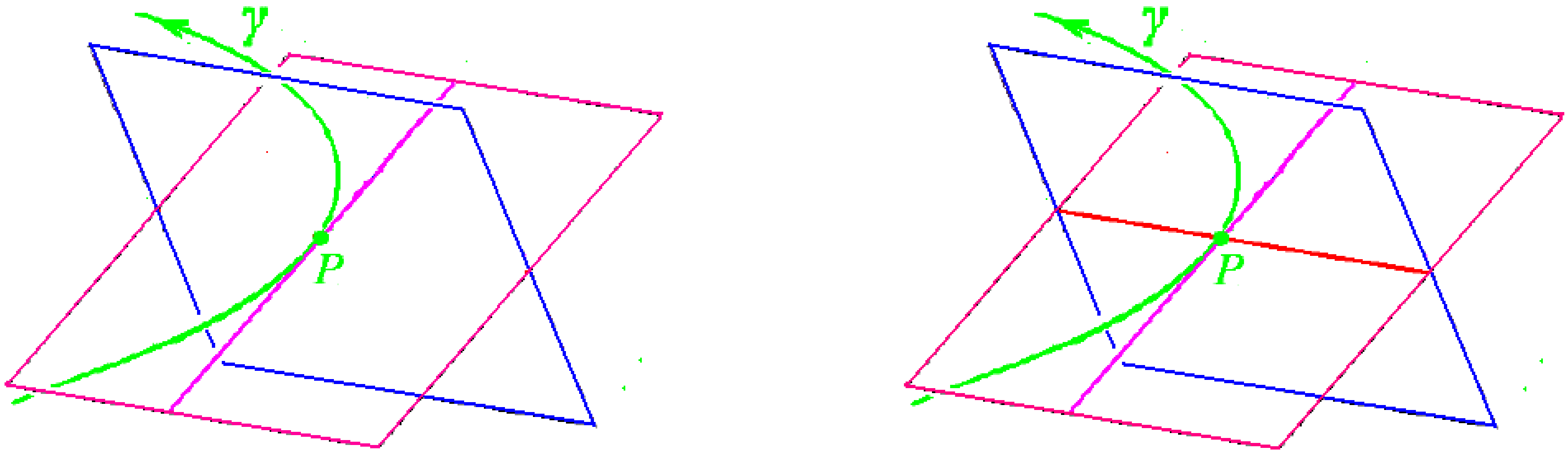


Твердження. *Щільнодотична і нормальна площини кривої γ в точці P є взаємно ортогональними.*

Доведення. Щільнодотична площина містить дотичну пряму, а нормальна площина ортогональна дотичній площині. Значить, щільнодотична і нормальна площини кривої γ в точці P є взаємно ортогональними.



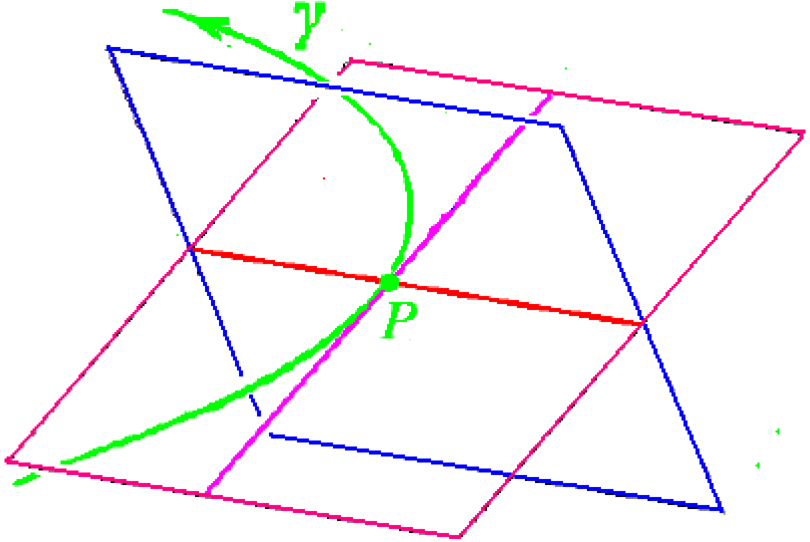
Пряма, що є перетином шільнодотичної і нормальної площин кривої γ в точці P, називається *головною нормаллю* кривої γ в точці P.

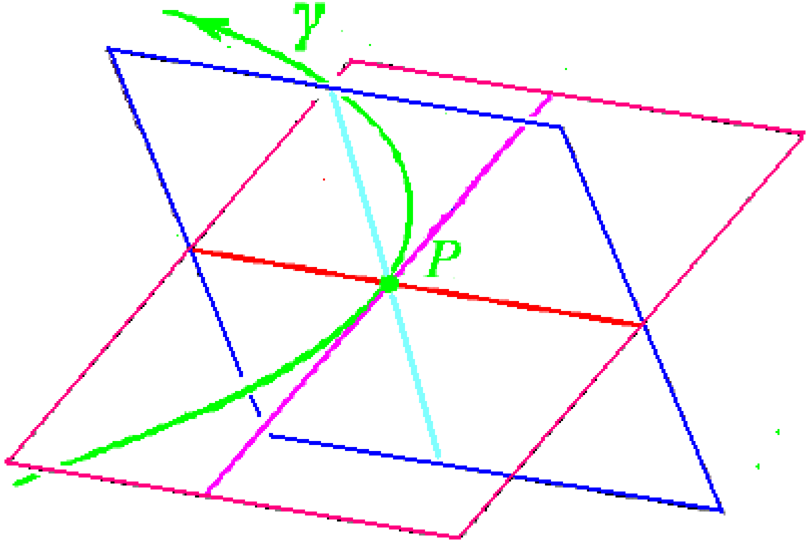


Твердження. *Головна нормаль ортогональна до дотичної прямої.*

Доведення. Головна нормаль належить нормальній площині. А дотична пряма ортогональна нормальній площині. Значить, дотична пряма і головна нормаль взаємно ортогональні.

Пряма в нормальній площині кривої γ в точці P, яка проходить через точку P ортогонально до головної нормалі кривої γ в точці P, називається *бінормаллю* кривої γ в точці P.





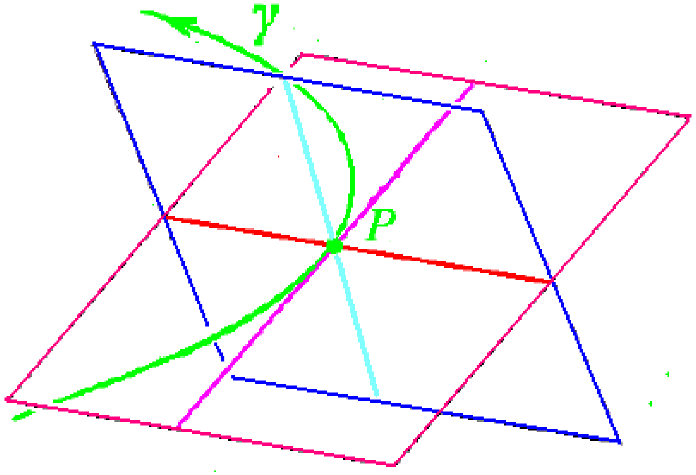
Твердження. *Бінормаль ортогональна до дотичної прямої і головної нормалі.*

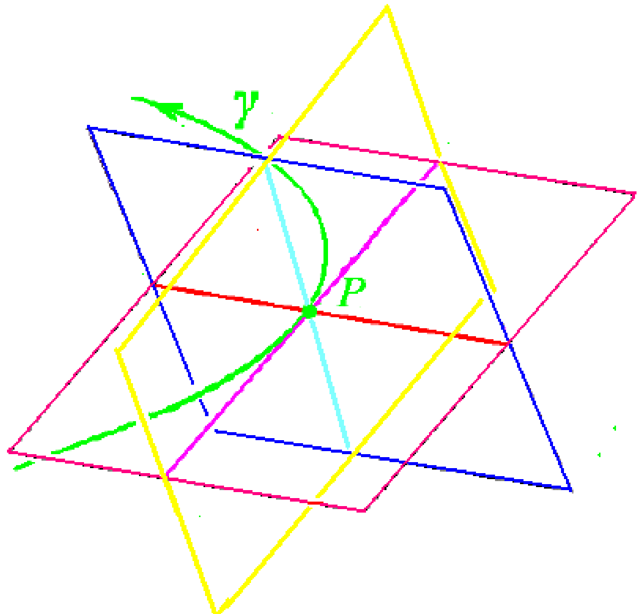
Доведення. Бінормаль ортогональна до головної нормалі за визначенням.

Бінормаль належить нормальній площині, а дотична пряма ортогональна нормальній площині. Значить, бінормаль ортогональна до дотичної прямої.

Наслідок. *Три прямі – дотична пряма, головна нормаль і бінормаль в точці P – є взаємно ортогональними.*

Площина, що проходить через дотичну пряму і бінормаль кривої γ в точці P, називається *спрямною площиною* кривої γ в точці P.





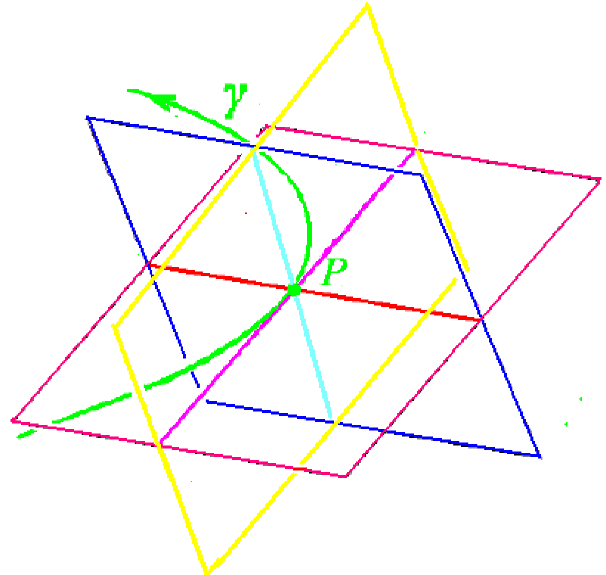
Твердження. *Спрямна площина є ортогональною до головної нормалі, до щільно дотичної площини і до нормальної площини.*

Доведення. Спрямна площина містить дотичну пряму і бінормаль. А головна нормаль ортогональна дотичній прямій і бінормалі. Значить, спрямна площина ортогональна головній нормалі.

Щільнодотична площина і нормальна площина містять головну нормаль. А спрямна площина ортогональна головній нормалі. Значить, спрямна площина ортогональна щільнодотичній площині і нормальній площині.

Наслідок. *Три площини – щільно дотична, нормальна і спрямна площини в точці P – є взаємно ортогональними.*

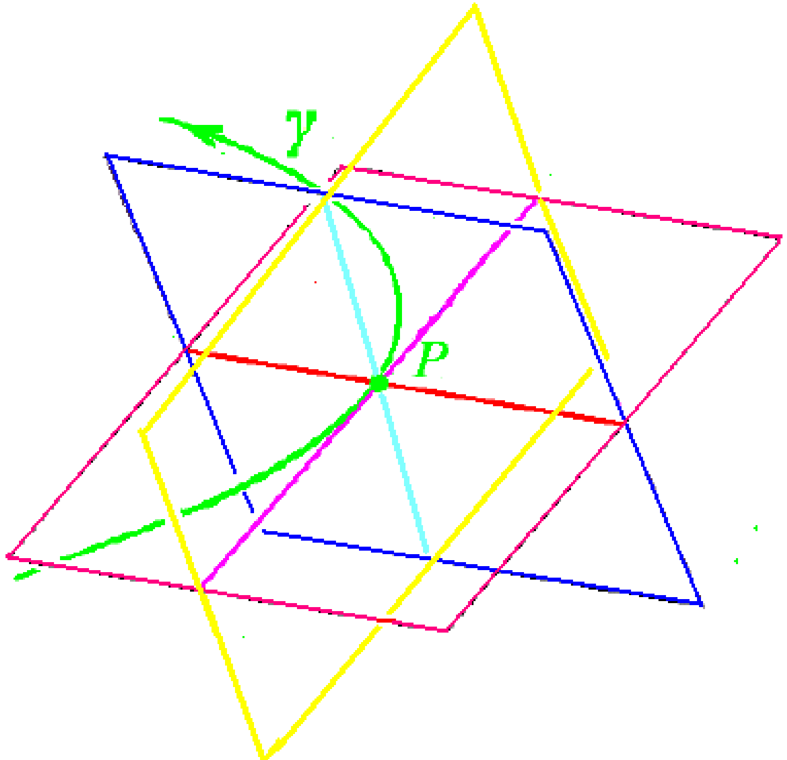
Три взаємно ортогональні прямі – дотична пряма, головна нормаль і бінормаль в точці P – і три взаємно ортогональні площини – щільно дотична, нормальна і спрямна площини в точці P – утворюють *тригранник Френе* кривої γ в точці P.



Дотична пряма	$\subset$	*Щільнодотична площина*
	$\subset$	*Спрямна площина*
	$\perp$	*Нормальна площина*
Головна нормаль	$\subset$	*Щільнодотична площина*
	$\perp$	*Спрямна площина*
	$\subset$	*Нормальна площина*
Бінормаль	$\perp$	*Щільнодотична площина*
	$\subset$	*Спрямна площина*
	$\subset$	*Нормальна площина*

Зауваження 1. В кожній точці P кривої γ, де $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, тригранник Френе визначений однозначно.

Зауваження 2. В кожній точці P кривої γ, де $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, визначається свій окремий тригранник Френе. Коли точка P рухається по кривій γ, тригранник Френе буде, взагалі кажучи, змінюватись.



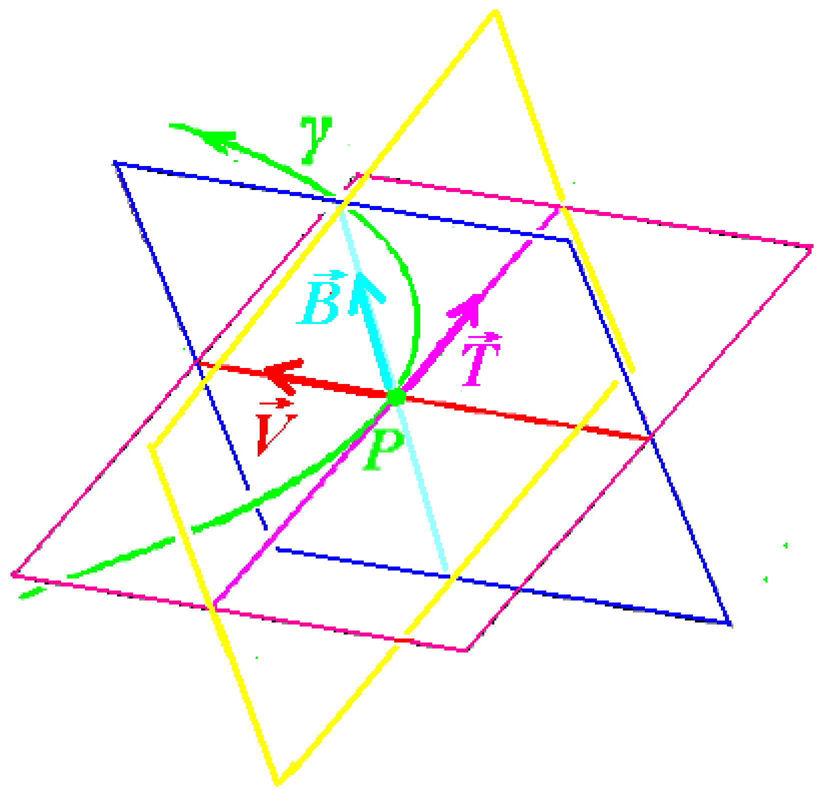
Як задати елементи тригранника Френе в термінах радіус-вектора кривої?

Позначимо:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt}$$

$$\vec{B} = [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]$$

$$\vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}]$$



Вектори $\vec{T}(t_0)$, $\vec{V}(t_0)$, $\vec{B}(t_0)$ є напрямними векторами відповідно дотичної прямої, головної нормалі і бінормалі кривої γ в точці $P(t_0)$.

Вектори $\vec{T}(t_0)$,$\vec{V}(t_0)$,$\vec{B}(t_0)$ є нормальними векторами відповідно нормальної, спрямної і щільнодотичної площин кривої γ в точці $P(t_0)$.

Ортонормовані вектори:

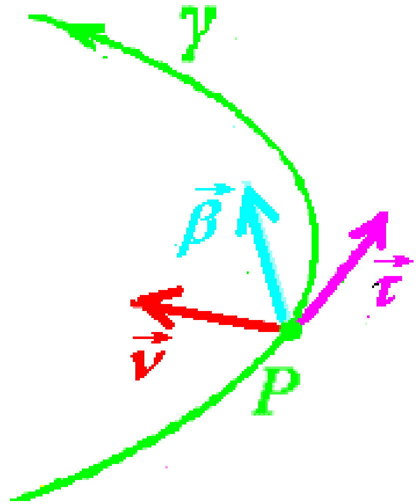
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{|\frac{d\vec{f}}{dt}|} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|} \cdot [\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{|[\vec{B}, \vec{T}]|} \cdot [\vec{B}, \vec{T}]$$

Для параметрично заданої кривої γ в кожній її точці P, де $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$, визначаються однозначно.

Вони утворюють додатно орієнтований ортонормований базис в $I\!R^3$, який називається *базисом Френе* кривої γ точці P.



Коли точка P рухається по криві γ, ортонормований базис $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ буде змінюватись, утворюючи *рухомий базис Френе вздовж кривої* γ.

Алгебраїчні властивості базису Френе $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$:

1) $<\vec{\tau},\vec{\tau}> \equiv 1$, $<\vec{\nu},\vec{\nu}> \equiv 1$, $<\vec{\beta},\vec{\beta}> \equiv 1$,
$<\vec{\tau},\vec{\nu}> \equiv 0$, $<\vec{\tau},\vec{\beta}> \equiv 0$, $<\vec{\nu},\vec{\beta}> \equiv 0$

2) $[\vec{\tau},\vec{\nu}] = \vec{\beta}$, $[\vec{\nu},\vec{\beta}] = \vec{\tau}$, $[\vec{\beta},\vec{\tau}] = \vec{\nu}$

3) $(\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}) \equiv 1$

Задача.

1. Довести, що при зміні орієнтації на кривій γ вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\beta}$ змінюють напрям на протилежний, а вектор $\vec{\nu}$ не змінюється:

$$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} \;\; \rightarrow \;\; -\vec{\tau}, \vec{\nu}, -\vec{\beta}$$

2. Довести, що при паралельному переносі кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ не змінюються.

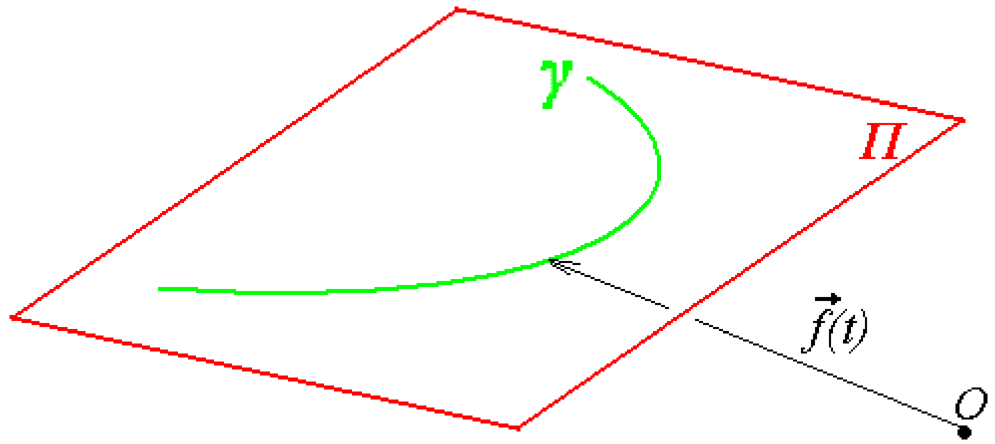
3. Довести, що при ортогональному перетворенні (обертанні) кривої γ в просторі $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ змінюються відповідно до того ж ортогонального перетворення.

4.3. Плоскі криві як частковий випадок просторових кривих

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b).$$

Припустимо, що крива γ є *плоскою*, тобто, належить деякій двомірній площині Π в $I\!R^3$.



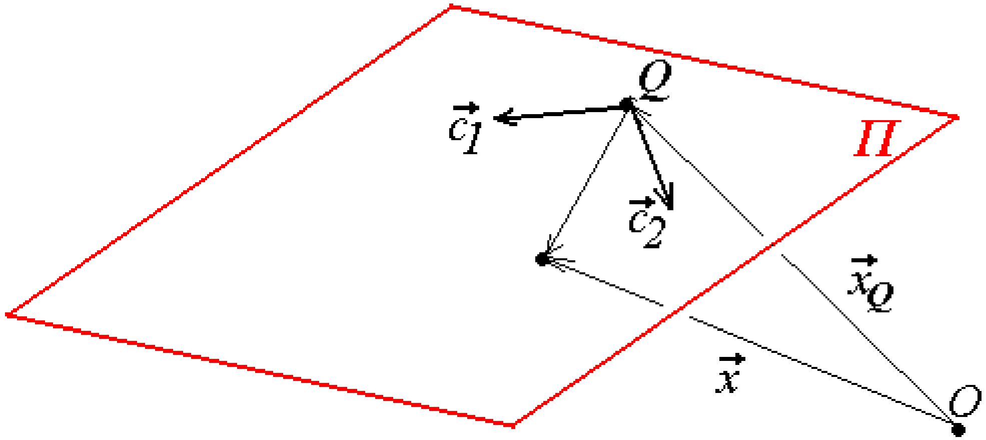
Твердження. Для довільної точки P кривої γ, де виконано $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$ і, як наслідок, визначено тригранник Френе, має місце наступне:

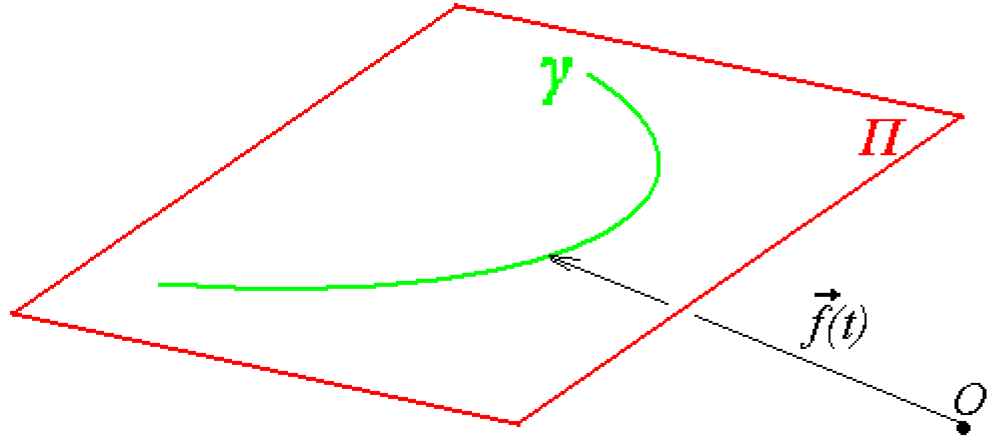
1) щільнодотична площина кривої γ в точці P співпадає з площиною Π;
2) бінормаль кривої γ в точці P є прямою, ортогональною площині Π;
3) спрямна площина кривої γ в точці P ортогональна площині Π;
4) нормальна площина кривої γ в точці P ортогональна площині Π;
5) головна нормаль кривої γ в точці P належить площині Π і є нормальною прямою кривої $\gamma \subset \Pi$ в точці P.

Наслідок. Для плоскої кривої маємо:
1) усі щільнодотичні площини співпадають: $\vec{\tau}, \vec{\nu} \in \Pi \ \forall P \in \gamma$
2) усі бінормалі паралельні друг другу: $\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_0$.

Доведення. Нехай площина *П* проходить через якусь точку Q і натягнута на пару векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$. Довільна точка площини *П* має радіус-вектор

$$\vec{x} = \vec{x}_Q + u \cdot \vec{c}_1 + v \cdot \vec{c}_2$$





Оскільки крива γ лежить в площині *П* , маємо

$$\vec{f}(t) = \vec{x}_Q + u(t) \cdot \vec{c}_1 + v(t) \cdot \vec{c}_2$$

Обчислимо похідні радіус-вектора кривої:

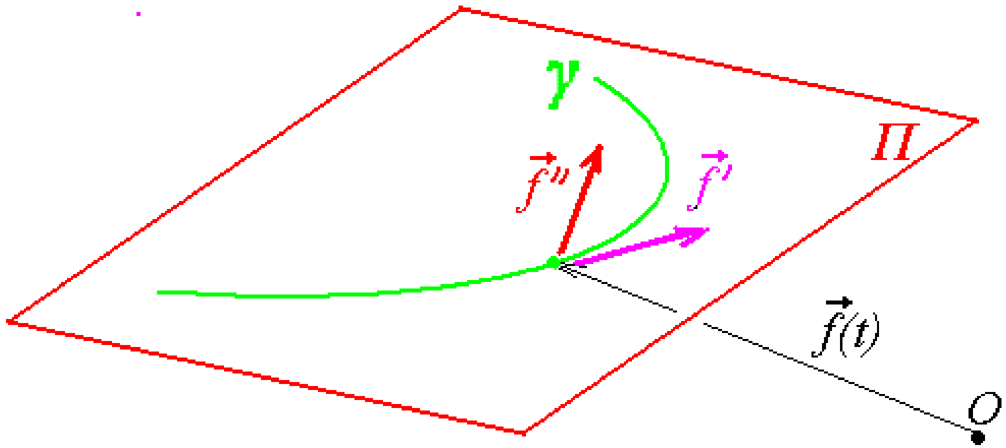
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \vec{c}_1 + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{c}_2$$

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} \cdot \vec{c}_1 + \frac{d^2v}{dt^2} \cdot \vec{c}_2$$

Як наслідок, вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$ є лінійними комбінаціями векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$.

Значить, щільнодотична площина в кожній точці кривої натягнута на вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, тобто, на ті ж вектори, що і площина *П,* і проходить вона через точку кривої, що лежить в площині *П.*

Звідси випливає, що усі щільнодотичні площини кривої γ співпадають з площиною *П*.



Пункт 1) доведено. Інші пункти твердження довести самостійно, використовуючи пункт 1) і визначення елементів тригранника Френе за допомогою умов ортогональності та приналежності прямих і площин.

5. Кривина кривої

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

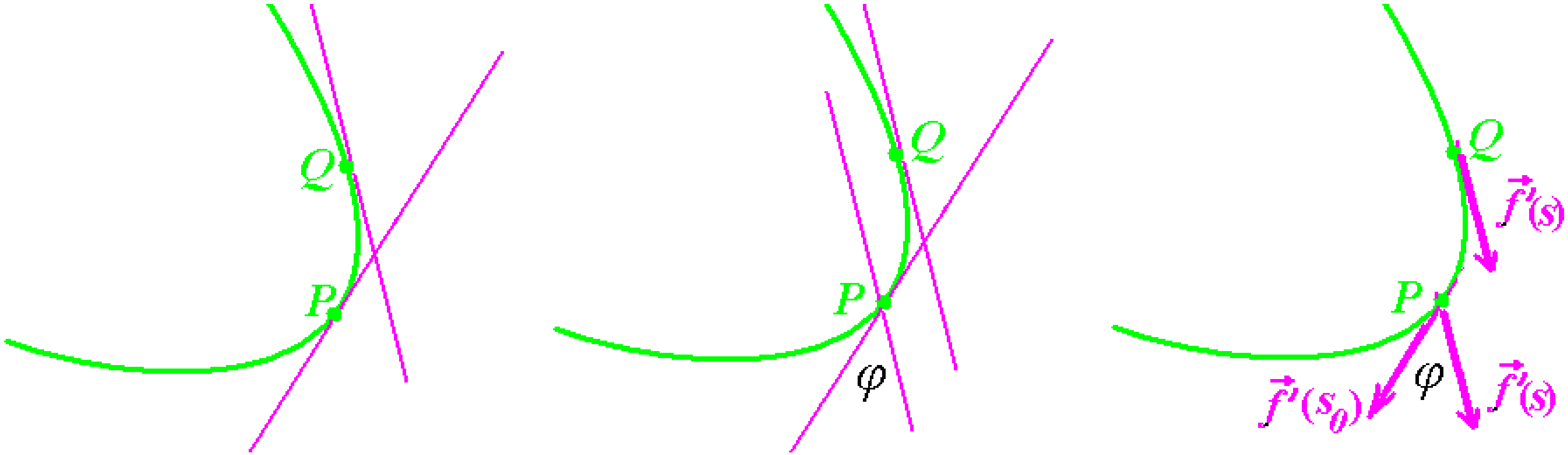
$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s - натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій γ розглянемо кут φ між дотичними прямими кривої γ в точках P і Q.

Проаналізуємо поведінку кута φ при $s \to s_0$, коли точка Q збігається до точки P.

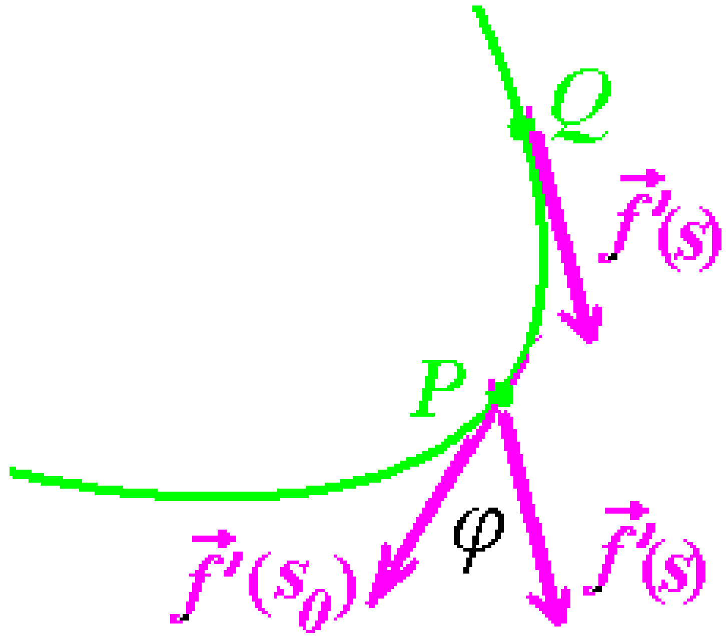


Очевидно, що $\lim\limits_{s\to s_0}\varphi=0$. Розглянемо $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\varphi}{s-s_0}$

Визначення. Якщо границя $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\varphi}{s-s_0}$ існує, то її значення називається *кривиною* кривої в точці P і позначається k.

Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^2. Тоді отримаємо

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\varphi}{s-s_0}=\lim_{s\to s_0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{s-s_0}=$$



$$=\lim_{s\to s_0}\frac{2\frac{|\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)|}{2}}{s-s_0}=\lim_{s\to s_0}\frac{|\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)|}{s-s_0}=$$

$$=|\lim_{s\to s_0}\frac{\vec{f}'(s)-\vec{f}'(s_0)}{s-s_0}|=|\vec{f}''(s_0)|$$

Висновок: $k=|\vec{f}''(s_0)|$