

1.1(4). $\gamma = \left(\frac{a}{ch^2 t}, a(t - th^2 t) \right)$, $\gamma' = a \left(-\frac{2ht}{ch^2 t}, 1 - \frac{1}{ch^2 t} \right)$. $\frac{ch^2 t - 1}{ch^2 t} = \frac{2ht}{ch^2 t}$

Demanda nun $t = t_0$: $\frac{x - \frac{a}{ch^2 t_0}}{-\frac{2ht_0}{ch^2 t_0}} = \frac{y - a(t_0 - th^2 t_0)}{\frac{ch^2 t_0}{ch^2 t_0}}$

1.1(5). $\gamma = (r \cos t, r \sin t, ht)$, $\gamma' = (-r \sin t, r \cos t, h)$

Demanda nun $t = t_0$: ~~$\frac{x - r \cos t_0}{-r \sin t_0} = \frac{y - r \sin t_0}{r \cos t_0} = \frac{z - ht_0}{h}$~~ $\frac{x - r \cos t_0}{-r \sin t_0} = \frac{y - r \sin t_0}{r \cos t_0} = \frac{z - ht_0}{h}$

$$\underline{1.2.} \quad r = (t, t^4), \quad r' = (1, 4t^3)$$

$$\text{Допущена нуль } t = t_0: \quad \frac{x-t_0}{1} = \frac{y-t_0^4}{4t_0^3}$$

$$4t_0^3(x-t_0) = y-t_0^4$$

$$4t_0^3x - y - 3t_0^4 = 0$$

Прощаемся через $(-1, 0)$:

$$-4t_0^3 - 3t_0^4 = 0$$

$$t_0^3(-4-3t_0) = 0$$

$$t_0 = 0 : y = 0$$

$$t_0 = -\frac{4}{3}$$

$$4 \cdot \left(-\frac{64}{27}\right)x - y - 3 \cdot \frac{256}{81} = 0$$

$$256x + 27y + 256 = 0$$

Параллельно $x' = y$, модно $x - y = 0$:

$$\frac{4t_0^3}{1} = \frac{-1}{-1}$$

$$4t_0^3 = 1$$

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$\underline{1.3.} \quad \phi(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$\phi_x = 4x(x^2 + y^2) - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\phi_y = 4y(x^2 + y^2) + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

Плоху готимна γ (x_0, y_0) :

$$2x_0(x_0^2 + y_0^2 - 1)(x - x_0) + 2y_0(x_0^2 + y_0^2 + 1)(y - y_0) = 0.$$

Для $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 0)$ (що належить колу):

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) &= 0 \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Линія проходить через $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$\begin{cases} x_0(x_0^2 + y_0^2 - 1)(\sqrt{2} - x_0) + y_0(x_0^2 + y_0^2 + 1)(\sqrt{2} - y_0) = 0 \\ (x_0^2 + y_0^2)^2 - 2(x_0^2 - y_0^2) = 0 \end{cases}$$

Один з розв'язків - $(\sqrt{2}, 0)$.

Линія паралельна Ox : $y = 0$:

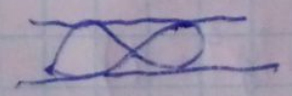
$$\begin{cases} x_0(x_0^2 + y_0^2 - 1) = 0 \\ (x_0^2 + y_0^2)^2 - 2(x_0^2 - y_0^2) = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0^4 + 2y_0^2 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$. Але це особлива точка.

$x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 - y_0^2 = \frac{1}{2}$, тоді $x_0^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $y_0^2 = \frac{1}{4}$.

Ще 4 точки $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Відповідні готимки - $y = \frac{1}{2}$ і

$y = -\frac{1}{2}$.



3.1.1 Доменина з 1.1. (4):

$$\frac{x - \frac{a}{\operatorname{ch} t}}{1} = \frac{y - a(t - t \operatorname{th} t)}{\operatorname{sh} t}$$

$$\operatorname{sh} t x - y + at - 2at \operatorname{th} t = 0.$$

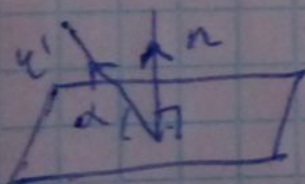
Перемнож Oy : $x=0$, $y = a(t - 2t \operatorname{th} t)$

Виглядає як $(\frac{a}{\operatorname{ch} t}, a(t - t \operatorname{th} t))$ до $(0, a(t - 2t \operatorname{th} t))$:

$$a \sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{ch} t} - 0\right)^2 + (t - t \operatorname{th} t - t + 2t \operatorname{th} t)^2} = a \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + t^2} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}} = a.$$

2. з 1.1. (5), нормальний вектор площини $\vec{n} = (-y \sin t, y \cos t, h)$.

Вектор нормалі Oxy - $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$. Для кута α між ними:


$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{e}_z, \vec{n} \rangle}{|\vec{e}_z| |\vec{n}|} = \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2} \cdot 1}$$

$$d = \operatorname{arccos} \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$

3. - an - no 2.

Задача 6.3. Знайдемо довжину дуги гвинтової лінії

$$r = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

від перетину з площиною Oxy до довільної точки. Перетин з площиною $z = 0$ відповідає значенню параметра $t = 0$, тож нам потрібна дуга, що відповідає $t \in [0, t_1]$ для $t_1 \geq 0$ або $t \in [t_1, 0]$ $t_1 \leq 0$. Обмежимося першим з цих випадків. Згадаємо, що напрямним вектором дотичної в кожній точці кривої є похідний вектор

$$r' = (x', y', z') = (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Він має довжину

$$|r'| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

тому довжина дуги

$$L = \int_0^{t_1} |r'(t)| dt = \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t \Big|_0^{t_1} = \sqrt{a^2 + b^2} t_1.$$

Задача 6.13. Тепер перепишемо рівняння гвинтової лінії, прийнявши за новий параметр довжину дуги. Такий параметр зветься натуральним. Виразимо його через вихідний параметр, взявши довжину дуги від його значення t_0 до t :

$$s(t) = \int_{t_0}^t |r'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \tau \Big|_{t_0}^t = \sqrt{a^2 + b^2} (t - t_0).$$

Тут при $t < t_0$ значення стає від'ємним: більш точно, натуральний параметр – це "орієнтована" довжина дуги. Зауважимо, що вибір натурального параметра залежить від вибору початкової точки дуги, тобто таких параметрів багато. Нехай для визначеності $t_0 = 0$. Тоді $s = \sqrt{a^2 + b^2} t$, отже $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Таким чином, нова параметризація має вигляд:

$$r(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Зауважимо, що у натуральній параметризації вектор

$$r' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right)$$

має довжину 1.

1. Кут між кривими, що перетинаються

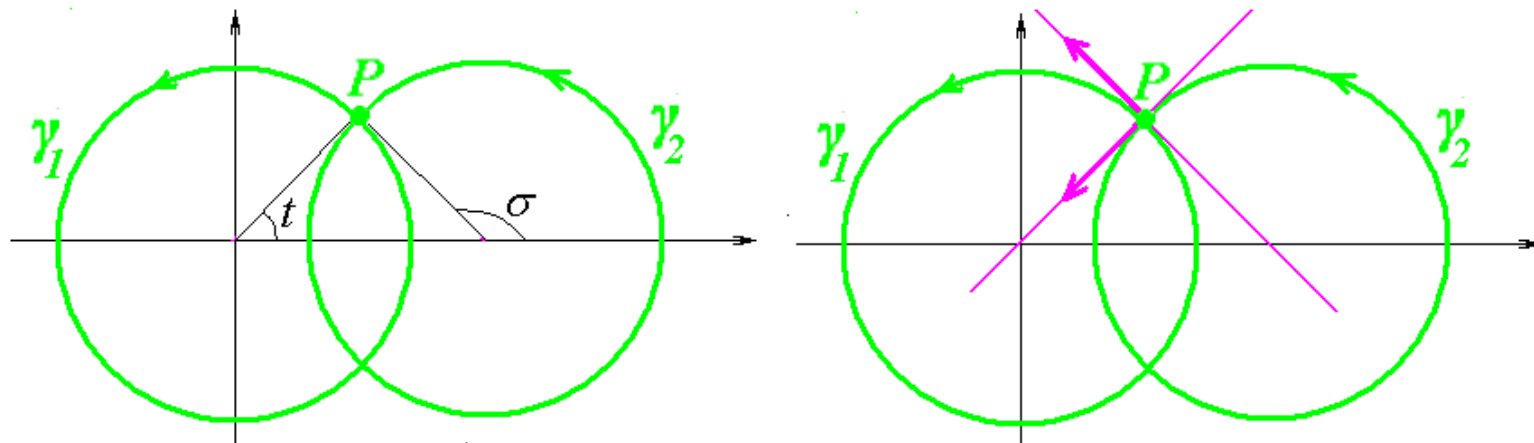
Задача 1.1. Знайдіть точку перетину наступних параметрично заданих кривих та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \quad \gamma_2: \begin{cases} x^1 = \sqrt{2} + \cos \sigma \\ x^2 = \sin \sigma \end{cases}, \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

Розв'язання. Знаходимо точку перетину:
$$\begin{cases} \cos t = \sqrt{2} + \cos \sigma \\ \sin t = \sin \sigma \end{cases}$$

Розв'язки: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $\sigma = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ та $t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $\sigma = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$

Візьмемо розв'язок $t = \frac{\pi}{4}$, $\sigma = \frac{3\pi}{4}$, йому відповідає точка перетину P



Обчислимо дотичний вектор кривої γ_1 в довільній її точці:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Дотичний вектор кривої γ_1 в точці P :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Обчислимо дотичний вектор кривої γ_2 в довільній її точці:

$$\vec{w}(\sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \cos \sigma \\ \sin \sigma \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{w}}{d\sigma} = \begin{pmatrix} -\sin \sigma \\ \cos \sigma \end{pmatrix}$$

Дотичний вектор кривої γ_2 в точці P :

$$\frac{d\vec{w}}{d\sigma} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Обчислимо кут між векторами $\frac{d\vec{f}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ і $\frac{d\vec{w}}{d\sigma}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Маємо

$$\cos \alpha = \frac{\left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{d\vec{w}}{d\sigma}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right\rangle}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \cdot \left| \frac{d\vec{w}}{d\sigma}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0$$

Відповідь: Кут між заданими кривими в точці перетину P дорівнює $\frac{\pi}{2}$

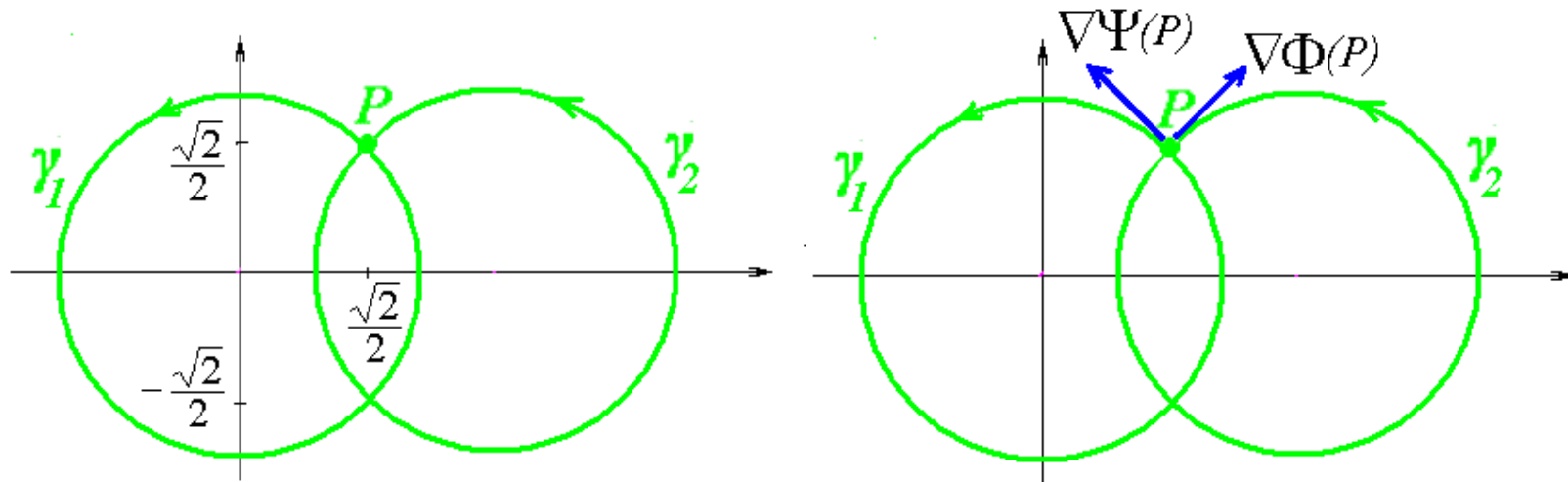
Задача 1.2. Знайдіть точку перетину наступних неявно заданих кривих та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1: (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad \gamma_2: (x^1 - \sqrt{2})^2 + (x^2)^2 - 1 = 0,$$

Розв'язання: Знаходимо точку перетину:
$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 \\ (x^1 - \sqrt{2})^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язки: $x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ та $x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Візьмемо розв'язок $x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, йому відповідає точка перетину P



Кут між кривими дорівнює куту між дотичними прямими. А кут між дотичними прямими визначається кутом між нормаллями дотичних прямих.

Обчислимо градієнт функції $\Phi(x,y) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1$, що задає неявно криву γ_1 :

$$\nabla\Phi = (2x^1, 2x^2)$$

В точці $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ маємо:

$$\nabla\Phi(P) = (2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

це є нормаль до дотичної прямої кривої γ_1 в точці P .

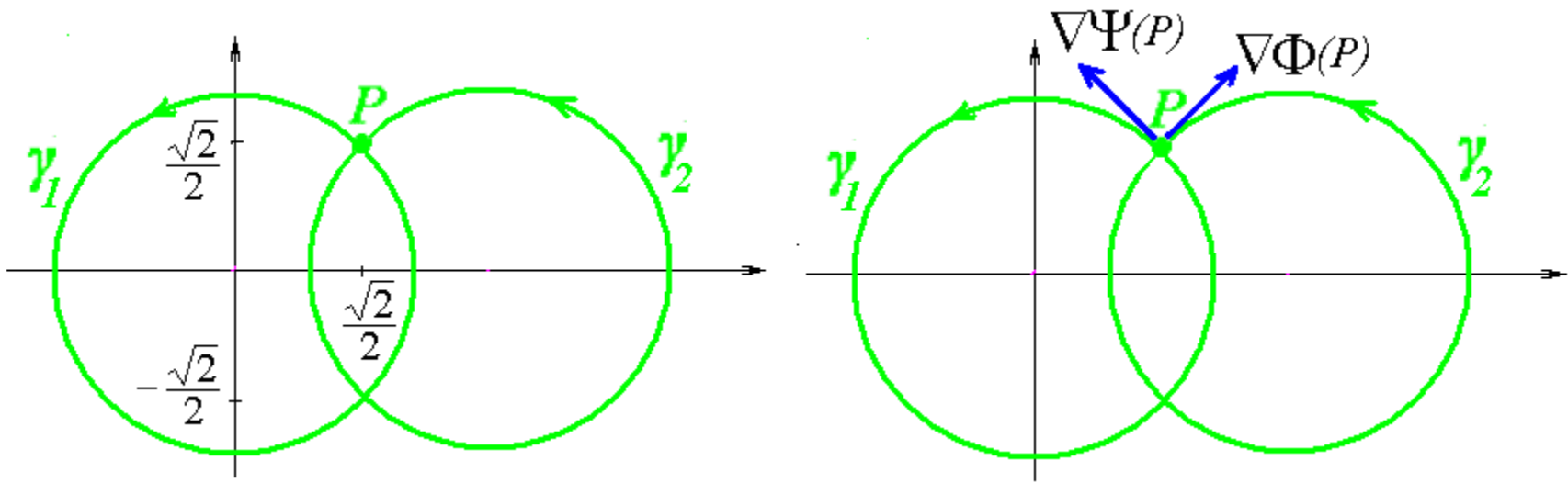
Обчислимо градієнт функції $\Psi(x,y) = (x^1 - \sqrt{2})^2 + (x^2)^2 - 1$, що задає неявно криву γ_2 :

$$\nabla\Psi = (2(x^1 - \sqrt{2}), 2x^2)$$

В точці $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ маємо:

$$\nabla\Psi(P) = (2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}), 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

це є нормаль до дотичної прямої кривої γ_2 в точці P .



Обчислюємо кут між знайденими векторами

$$\cos \alpha = \frac{\langle \nabla \Phi(P), \nabla \Psi(P) \rangle}{|\nabla \Phi(P)| \cdot |\nabla \Psi(P)|} = \frac{0}{2 \cdot 2} = 0$$

Відповідь: Кут між заданими кривими в точці перетину P дорівнює $\frac{\pi}{2}$

2. Щільнодотична площина

Задача 2.1. Для параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^3 запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P :

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad P(t=\pi).$$

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ :

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу та другу похідну радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

$$\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] = \begin{pmatrix} t \sin t \\ -t \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Отже, крива γ є регулярною і в кожній її точці є однозначно визначена щільнодотична площина. Зокрема, в точці $P(t=\pi)$ маємо:

$$\vec{f}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \\ h\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt}(\pi) = \begin{pmatrix} -\sin \pi \\ \cos \pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(\pi) = \begin{pmatrix} -\cos \pi \\ -\sin \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шукана щільно дотична площина проходить через точку P , а вектори

$\frac{d\vec{f}}{dt}(\pi)$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(\pi)$ утворюють базис в цій площині.

Параметричне рівняння щільнодотичної площини:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u, v \in (-\infty, \infty)$$

Неявне рівняння щільнодотичної площини:

$$\begin{vmatrix} x^1 - (-1) & 0 & 1 \\ x^2 - 0 & -1 & 0 \\ x^3 - h\pi & \pi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$\pi x^2 + x^3 - \pi h = 0$$

Задача 2.2. Перевірте, що для параметрично заданої гвинтової лінії γ в \mathbb{R}^3

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

щільнодотичні площини в усіх точках кривої нахилені однаково по відношенню до вертикального координатного напрямку x^3 .

Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої в довільній точці та координатною віссю x^3 .

Задача 2.3. Для параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^4 запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P :

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \cos \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad P(t=0).$$

* Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої γ в довільній точці та координатними осями.

Задача 2.4. Доведіть, що якщо регулярна (класу C^2) крива γ в \mathbb{R}^n параметризована натуральним параметром, $\vec{x} = \vec{f}(s)$, то тоді

1) вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ взаємно ортогональні, тобто, $\langle \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \rangle \equiv 0$,

2) вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ лінійно незалежні $\Leftrightarrow \left| \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right| \neq 0$.

Доведення. Для параметризації натуральним параметром s маємо

$$\left| \frac{d\vec{f}}{ds} \right| \equiv 1,$$

тобто,

$$\left\langle \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d\vec{f}}{ds} \right\rangle \equiv 1$$

Продиференціюємо цю тотожність:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\langle \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d\vec{f}}{ds} \right\rangle &\equiv \frac{d}{ds} 1 \\ \left\langle \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \frac{d\vec{f}}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right\rangle &\equiv 0 \end{aligned}$$

З урахуванням симетричності скалярного добутку отримуємо:

$$\left\langle \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right\rangle \equiv 0$$

Таким чином, вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ при кожному значенні s є взаємно ортогональними.

Як наслідок, $\frac{d\vec{f}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ є лінійно незалежними тоді, і тільки тоді, коли $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ є нульовим, оскільки $\frac{d\vec{f}}{ds}$ є завідомо ненульовим (його довжина $\left| \frac{d\vec{f}}{ds} \right| \equiv 1$).

* **Задача 2.5.** Доведіть (або спростуйте), що якщо у регулярної (класу C^2) кривої γ в \mathbb{R}^3 усі щільнодотичні площини паралельні фіксованій площині Π , то тоді уся крива γ належить якійсь площині, паралельній площині Π .

Задача 5.6. Треба знайти щільнотичні площини кривої

$$x = t, y = t^2, z = t^3,$$

що проходять через точку $M(2, -\frac{1}{3}, -6)$. Згадаємо основні кроки знаходження щільнотичної площини з попередньої задачі:

$$r = (t, t^2, t^3),$$

$$r' = (1, 2t, 3t^2),$$

$$r'' = (0, 2, 6t),$$

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2, -6t, 2).$$

Отже, рівняння площини має вигляд (скоротимо відразу на 2)

$$3t^2(x - t) - 3t(y - t^2) + z - t^3 = 0,$$

$$3t^2 x - 3t y + z - t^3 = 0.$$

Підставимо координати M та розкладемо:

$$6t^2 + t - 6 - t^3 = 0,$$

$$6(t^2 - 1) + t(1 - t^2) = 0,$$

$$(t - 1)(t + 1)(t - 6) = 0.$$

Таким чином, потрібні площини відповідають значенням параметра $t = -1, 1, 6$:

$$3x + 3y + z + 1 = 0,$$

$$3x - 3y + z - 1 = 0,$$

$$108x - 18y + z - 216 = 0.$$