

Лекція 3. Кут між кривими. Довжина кривої і натуральна параметризація. Щільнодотична площина.

Розглянемо параметрично задану крива γ в \mathbb{R}^n з радіус-вектором

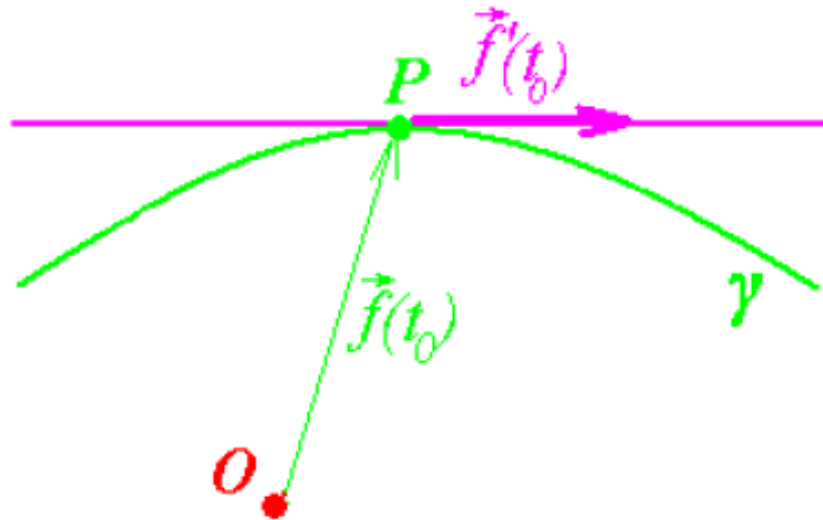
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

1) $\vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$

2) $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$.

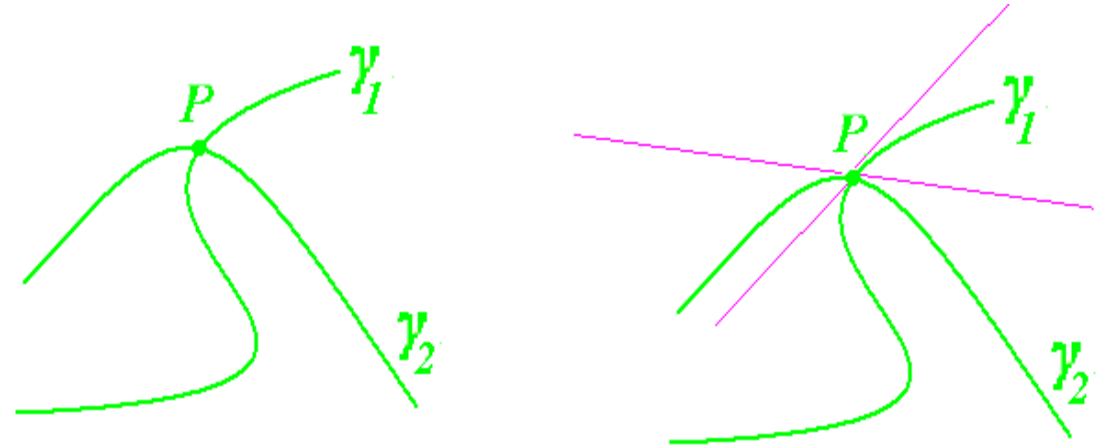
В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$:



Визначення. Якщо дві регулярні криві γ_1 і γ_2 перетинаються в деякій точці P , то *кутом* між кривими γ_1 і γ_2 в точці P називають кут між дотичними прямими кривих γ_1 і γ_2 в точці P .

Криві $\gamma_1 : \underline{\vec{x}} = \vec{f}(t)$, $\gamma_2 : \underline{\vec{x}} = \vec{w}(\sigma)$

Точка перетину P : $\vec{f}(t_0) = \vec{w}(\sigma_0)$



Дотичні вектори:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \quad , \quad \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0)$$

Кут визначається формулою

$$\cos \alpha = \frac{\langle \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0) \rangle}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \right| \cdot \left| \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0) \right|}$$

Розглянемо параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^n з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

1) $\vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$

2) $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0.$

Довжина кривої γ обчислюється / визначається за формулою

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt$$

3.1. Натуральна параметризація

Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в \mathbb{R}^n з радіус-вектором

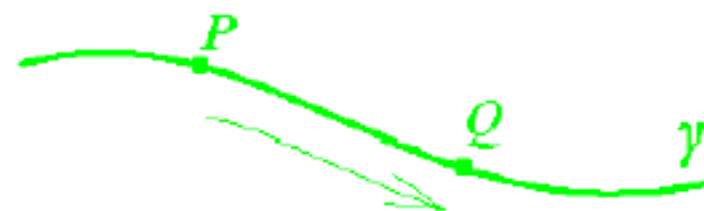
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b).$$

Зафіксуємо точку P на кривій γ , що відповідає значенню параметра t_0 .

Кожній довільній точці Q на кривій γ , що відповідає довільному значенню параметра t , зіставимо у відповідність величину

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt$$

Геометрично, величина s дорівнює довжині (зі знаком) дуги кривої γ від точки P до точки Q :



Очевидна формула:

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|$$

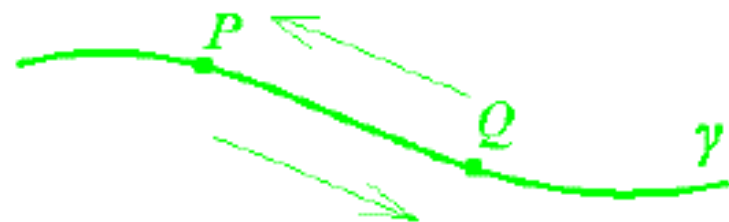
Як наслідок, $\frac{ds}{dt} \neq 0$ і перехід від параметра t до параметра s на кривій γ є регулярною заміною параметру.

Визначення. Величина s називається *натуральним параметром* на кривій γ .

Зауваження. Вибір натурального параметру залежить від вибору початкової точки P і орієнтації на кривій γ . А саме:

1) якщо замість початкової точки $P(t=t_0)$ взяти іншу початкову точку $\tilde{P}(t = \tilde{t}_0)$, то відповідні натуральні параметри та пов'язані співвідношенням $\tilde{s} = s + c$, де c – довжина дуги $\tilde{P}P$;

2) якщо змінити орієнтацію на кривій γ , залишивши початкову точку P незмінною, то натуральний параметр змінить знак на протилежний: $\tilde{s} = -s$.



Висновок. На кожній регулярній параметрично заданій кривій γ в \mathbb{R}^n можна ввести спеціальну параметризацію – параметризацію *натуральним* параметром.

Натуральна параметризація кривої має багато гарних властивостей, вона є дуже зручною при розв'язанні багатьох задач теорії кривих.

Твердження. Для регулярної параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^n з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$ параметр t є натуральним тоді, і тільки тоді, коли виконана умова

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| \equiv 1$$

Схема доведення.

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| \equiv 1 \Leftrightarrow s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0 \Leftrightarrow t = s + t_0 = s^*$$

Приклад. Розглянемо параметрично задано криву γ в \mathbb{R}^2 з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Крива γ – це коло радіуса r з центром в точці $C(c^1, c^2)$.

Обчислюємо похідну заданої вектор-функції:

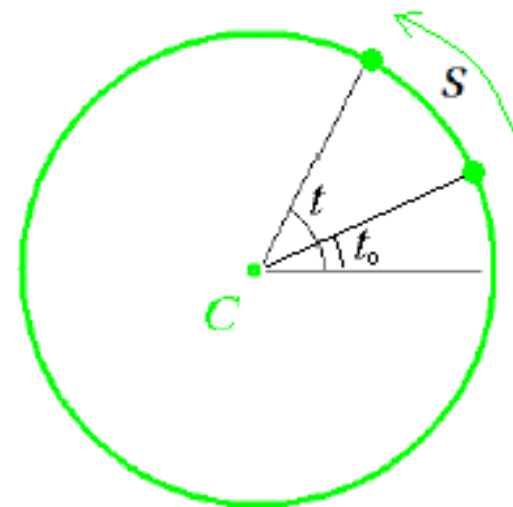
$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

Обчислюємо довжину похідної вектор-функції:

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = r$$

Обчислюємо натуральний параметр:

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t r dt = r(t - t_0) = rt - rt_0$$



$$t = \frac{s}{r} + t_0, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{s}{r} + t_0\right) + c^1 \\ r \sin\left(\frac{s}{r} + t_0\right) + c^2 \end{pmatrix}$$

3.2. Характерна властивість дотичної прямої

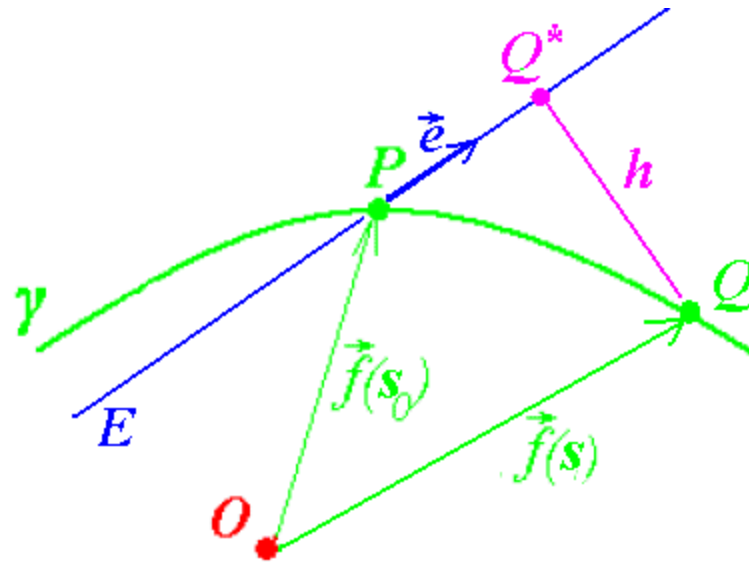
Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^n , параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a, b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку пряму E з одиничним напрямним вектором \vec{e} .

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до прямої E :

$$h = \sqrt{|PQ|^2 - |PQ^*|^2} = \sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}$$



Проаналізуємо поведінку функції $h(s)$ при $s \rightarrow s_0$.

Маємо:

$$h(s_0) = 0$$

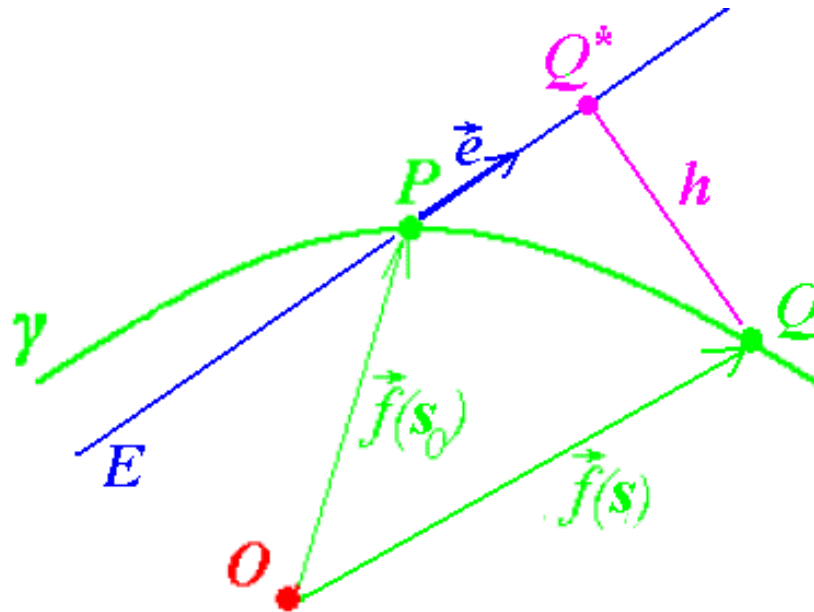
$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \frac{d}{ds} (\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}) = \\ &= \frac{d}{ds} (|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2) \\ &= \frac{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}} = \\ &= \frac{\frac{d}{ds} (\langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0) \rangle - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2)}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}} = \\ &= \frac{\langle \frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0) \rangle - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle \langle \frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{e} \rangle}{\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dh}{ds}(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{dh}{ds}(s) = \\
& = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s), \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0) \rangle - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle \langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s), \vec{e} \rangle}{\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - \langle \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e} \rangle^2}} = \\
& = \frac{\langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0), \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0) \rangle - \langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0), \vec{e} \rangle \langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0), \vec{e} \rangle}{\sqrt{|\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)|^2 - \langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0), \vec{e} \rangle^2}} = \\
& = \sqrt{|\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)|^2 - \langle \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0), \vec{e} \rangle^2} = \sin \varphi
\end{aligned}$$

де φ – кут між $\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)$ та \vec{e} , тобто, кут між прямою E і дотичною прямою кривої γ в точці P .

Наслідок. $h(s) = \sin \varphi \cdot (s - s_0) + o(s - s_0)$

Наслідок. $h(s) = o(s - s_0)$ тоді, і тільки тоді, коли E – дотична пряма кривої γ в точці P .



3.3. Щільнодотична площина кривої

Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^n з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

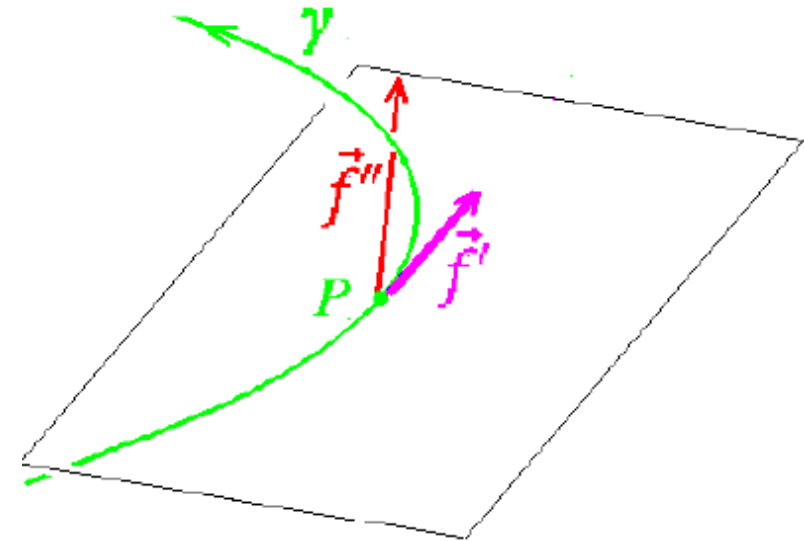
Зафіксуємо довільну точку P кривої γ і розглянемо пару векторів

$$\frac{d\vec{f}}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}.$$

Якщо ці вектори є лінійно неза-

лежними, $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, то через точку P

можна провести однозначно визначену площину, натягнуту на вказані вектори.



Ця площина називається *щільнодотичною* площиною кривої γ в точці P .

Зауваження 1. Визначення є змістовним при $n \geq 3$.

У випадку $n=2$ щільнодотична площина в довільній точці кривої γ просто співпадає з обхопною площиною \mathbb{R}^2 .

Зауваження 2. Визначення є коректним і не залежить від вибору параметризації на регулярній кривій. Якщо зробити регулярну заміну $t = t(\tilde{t})$ і записати радіус-вектор кривої в новій параметризації:

$$\vec{x} = \vec{f}(t(\tilde{t})) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t}),$$

ТО МАЄМО

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}}$$
$$\frac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt} \frac{d^2t}{d\tilde{t}^2}$$

ТОБТО

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} \\ \frac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\tilde{t}} & 0 \\ \frac{d^2t}{d\tilde{t}^2} & \left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\vec{f}}{dt} \\ \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Отже, при регулярній заміні параметру на кривій щільно дотична площина не змінюється, змінюється лише базис в цій площині.

Зауваження 3. Для регулярної параметрично заданої кривої γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) ,$$

якщо записати розкладання Тейлора в довільній точці $P(t_0)$,

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2) ,$$

то наближенням першого порядку буде *дотична* пряма кривої γ в точці P :

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) ,$$

а наближенням *другого* порядку буде якась крива, що належить *щільнодотичній* площині кривої γ в точці P :

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 .$$

Рівняння щільнодотичної площини

Параметричне задавання (при довільному $n \geq 3$)

$$\vec{x}(u, v) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot u + \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot v$$

Неявне задавання (при $n=3$)

$$N_1 \cdot (x^1 - f^1(t_0)) + N_2 \cdot (x^2 - f^2(t_0)) + N_3 \cdot (x^3 - f^3(t_0)) = 0,$$

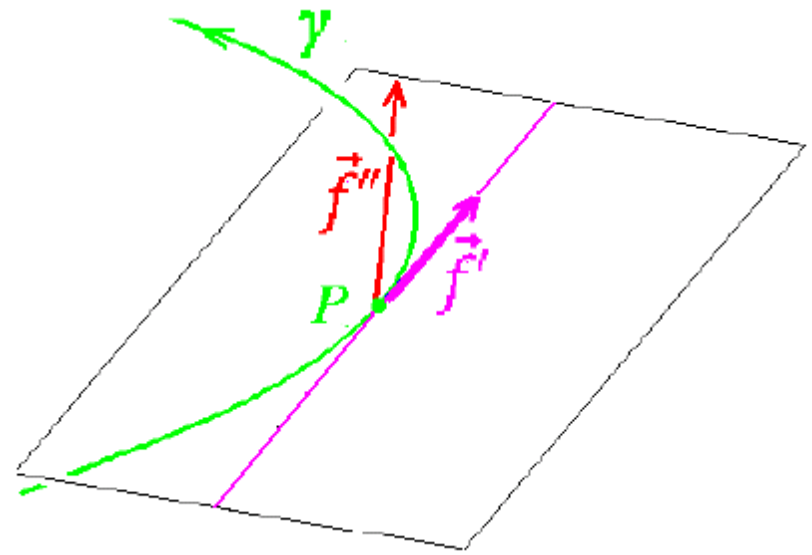
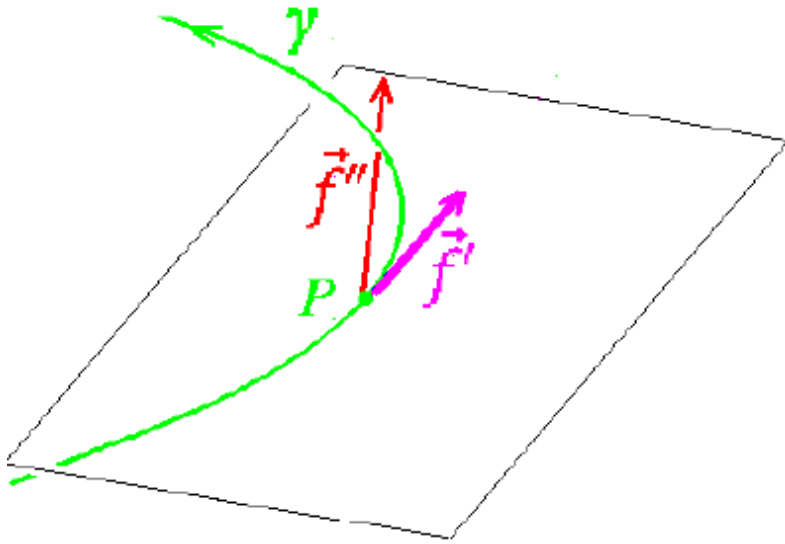
де

$$\vec{N} = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \right]$$

$$(N_1, N_2, N_3) = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{df^2}{dt} & \frac{df^3}{dt} \\ d^2f^2 & d^2f^3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{df^3}{dt} & \frac{df^1}{dt} \\ d^2f^3 & d^2f^1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{df^1}{dt} & \frac{df^2}{dt} \\ d^2f^1 & d^2f^2 \end{array} \right| \right)_{t=t_0}$$

Твердження. Щільнодотична площина кривої γ в точці P містить дотичну пряму кривої γ в точці P .

Доведення.



Щільнодотична площина як границя січних площин

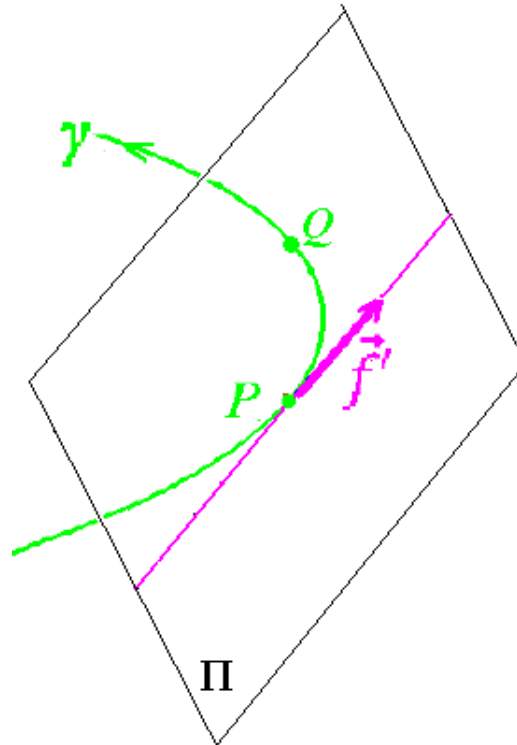
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^n з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

Зафіксуємо довільну точку $P(t_0)$ кривої γ .

Візьмемо дотичну пряму кривої γ в точці P , її напрямний вектор $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Для довільної точки $Q(t)$ кривої γ побудуємо двомірну площину Π , що містить дотичну пряму кривої γ в точці P і проходить через точку Q .



Яким буде граничне положення площини Π , коли точка $Q(t)$ прямує по кривій γ до точки $P(t_0)$?

Ідея розв'язання. Зважаючи на розкладання Тейлора

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

площина Π буде натягнута на вектори

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \text{ і } \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

тобто

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \text{ і } \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) + \frac{1}{(t - t_0)^2} \cdot o((t - t_0)^2).$$

Якщо $[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)] \neq 0$, то при $t \rightarrow t_0$ отримаємо площину, натягнуту на

вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ і $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$, тобто, щільнодотичну площину кривої γ в точці P .

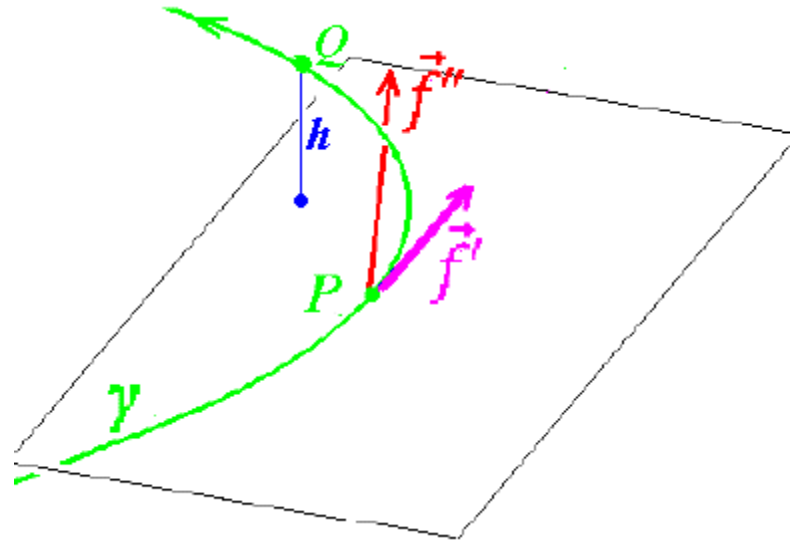
Характерна властивість щільно дотичної площини

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^n , параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a, b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку довільну двомірну площину E , натягнуту на пару ортонормованих векторів \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до площини E



Задача. Перевірте, що $h(s) = o((s-s_0)^2)$ тоді, і лише тоді, коли площина E є щільнодотичною площиною кривої γ в точці P .

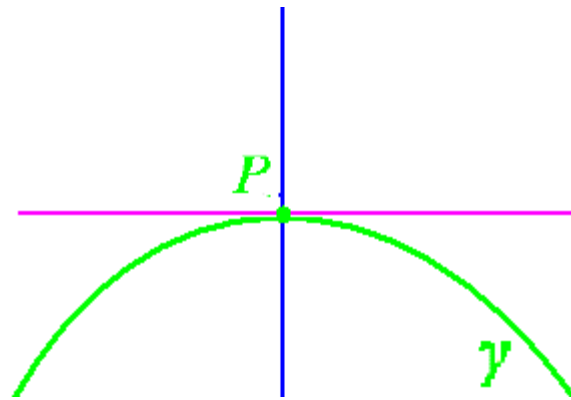
Нормальна пряма кривої в \mathbb{R}^2

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^2 з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

Зафіксуємо точку P на кривій γ .

Пряма, що проходить через точку P ортогонально до дотичної прямої кривої γ в точці P , називається *нормальною прямою* кривої γ в точці P .



Задача. Запишіть рівняння нормальної прямої в термінах радіус-вектора кривої γ .

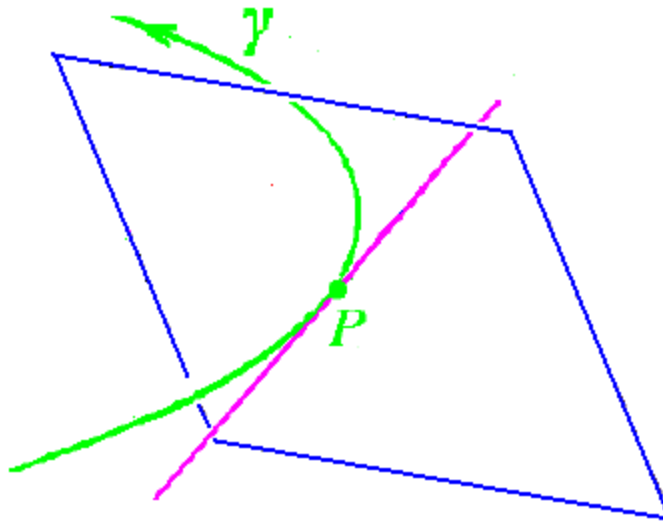
Тригранник Френе кривої в \mathbb{R}^3

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^3 з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

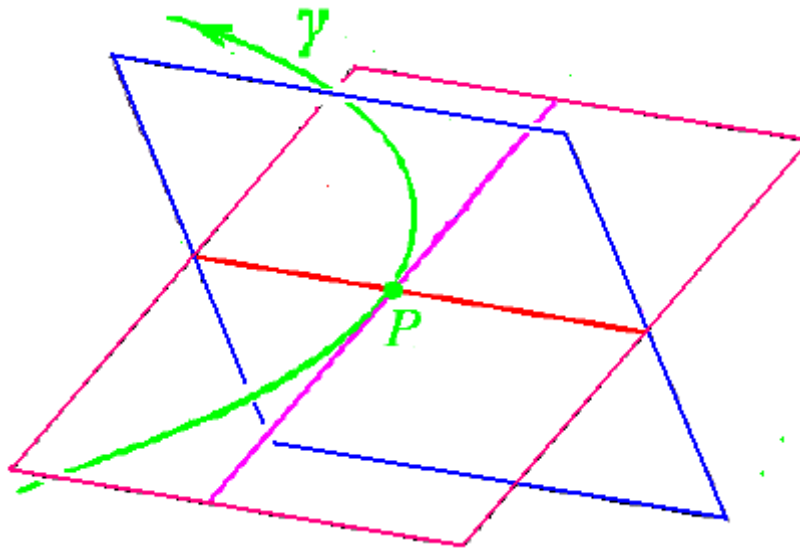
Зафіксуємо точку P на кривій γ .

Площина, що проходить через точку P ортогонально до дотичної прямої кривої γ в точці P , називається *нормальною площиною* кривої γ в точці P .



Задача. Запишіть рівняння нормальної площини в термінах радіус-вектора кривої γ .

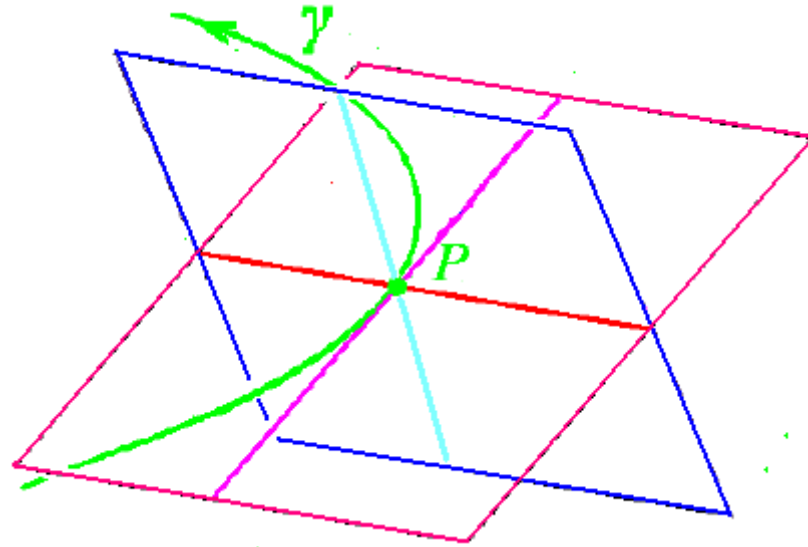
Якщо $\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right] \neq 0$ в точці P , то в точці P є ще шільнодотична площина:



Пряма, що є перетином шільнодотичної і нормальної площин кривої γ в точці P , називається *головною нормаллю* кривої γ в точці P .

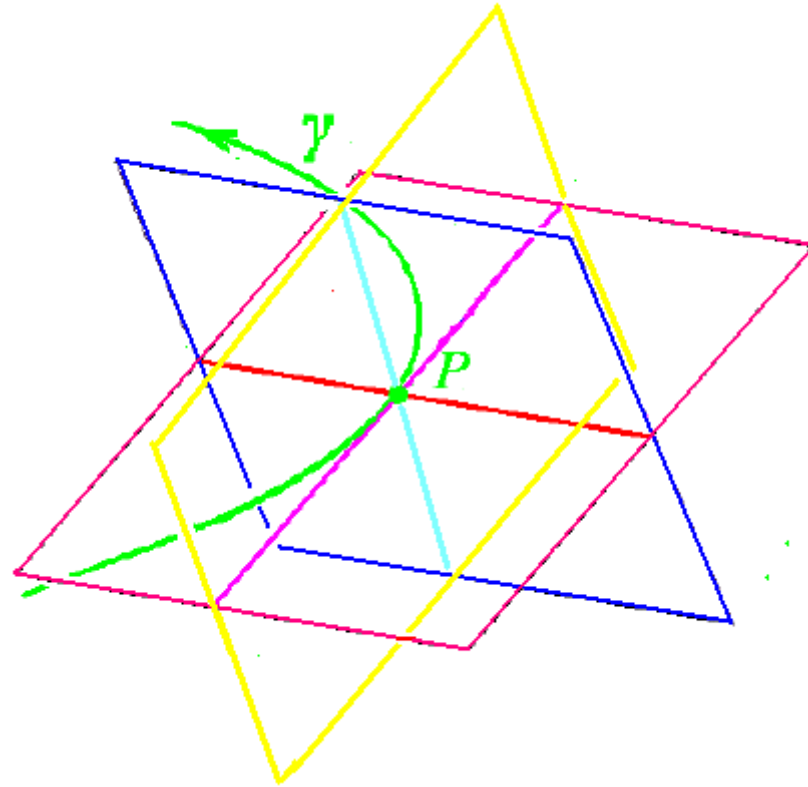
Задача. Запишіть рівняння головної нормалі в термінах радіус-вектора кривої γ .

Пряма в нормальній площині кривої γ в точці P , яка проходить через точку P ортогонально до головної нормалі кривої γ в точці P , називається *бінормаллю* кривої γ в точці P .



Задача. Запишіть рівняння бінормалі в термінах радіус-вектора кривої γ .

Площина, що проходить через дотичну пряму і бінормаль кривої γ в точці P , називається *спрямною площиною* кривої γ в точці P .



Задача. Запишіть рівняння спрямної площини в термінах радіус-вектора кривої γ .