

0. Домашнє завдання

Задача 0.1.1. Побудуйте неявно задану криву в \mathbb{R}^2 ,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$$

перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність

Розв'язання. Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2) + 4ax^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4axy - 2a^2y$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

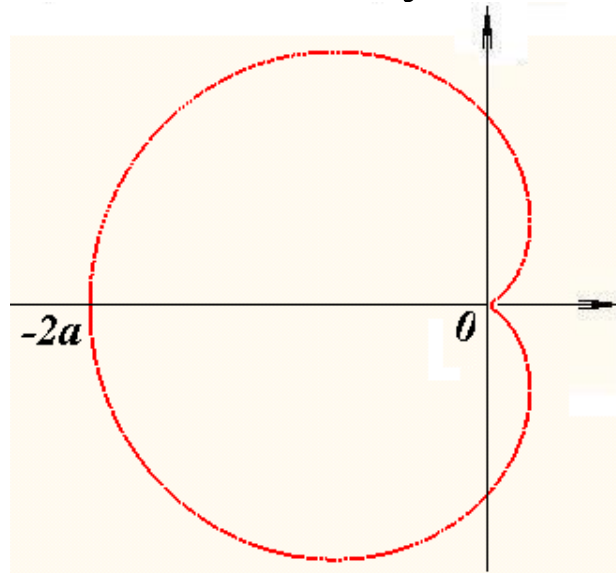
$$\begin{aligned} \Phi &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2, \\ 4x(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2) + 4ax^2 = 0, \\ 4y(x^2 + y^2) + 4axy - 2a^2y = 0.\end{aligned}$$

Ця система має єдиний розв'язок $x=0$, $y=0$. Значить, неявно задана крива не є регулярною і має одну особливу точку $P(0,0)$.

Крива називається *кардіоїдою* і має наступний вигляд:



Задача 0.2. Побудуйте параметрично задану криву в \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x^1 = -2r \cos t (1 + \cos t) \\ x^2 = 2r \sin t (1 + \cos t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність. Проаналізуйте, як точка рухається по заданій кривій з плином часу t .

Розв'язання. Крива γ є періодичною з періодом 2π .

Проаналізуємо регулярність кривої γ . Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \cos t (1 + \cos t) \\ 2r \sin t (1 + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є C^∞ -гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 2r \sin t (1 + 2 \cos t) \\ 2r (\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 2r \sin t(1 + 2 \cos t) \\ 2r (\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

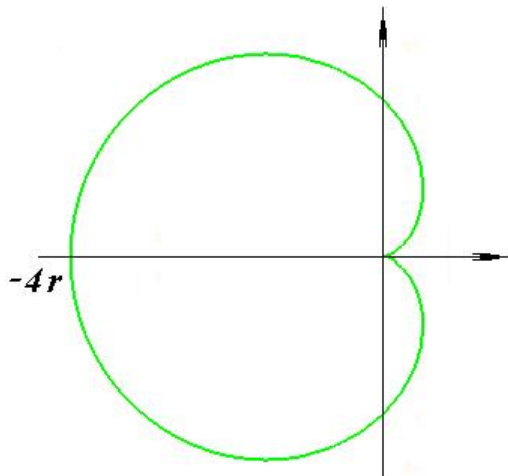
Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} 2r \sin t(1 + 2 \cos t) = 0 \\ 2r (\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок системи $t = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Цей розв'язок відповідає сингулярній точці P на кардіоїді γ . Радіус-вектор цієї точки дорівнює:

$$\vec{x}_P = \vec{f}(\pi + 2\pi m) = \begin{pmatrix} -2r \cos \pi (1 + \cos \pi) \\ 2r \sin \pi (1 + \cos \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, кардіоїда γ має єдину сингулярну точку $P(0,0)$.

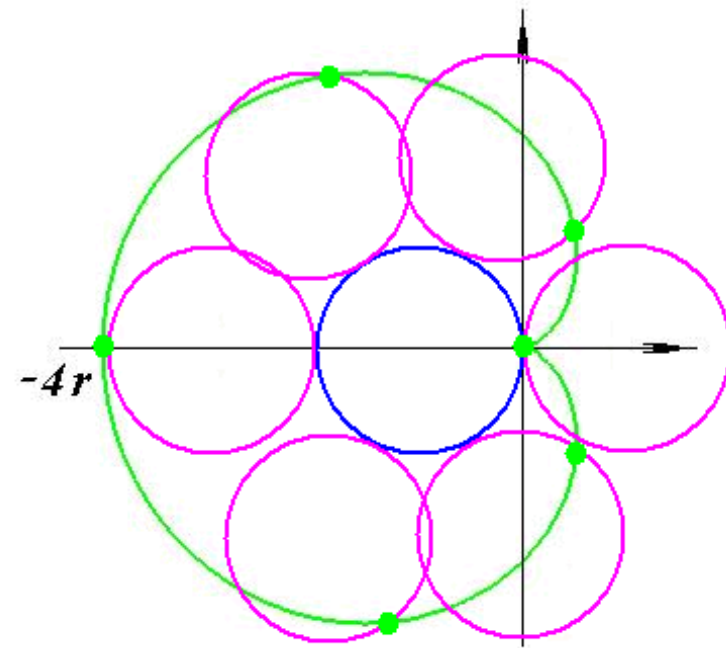
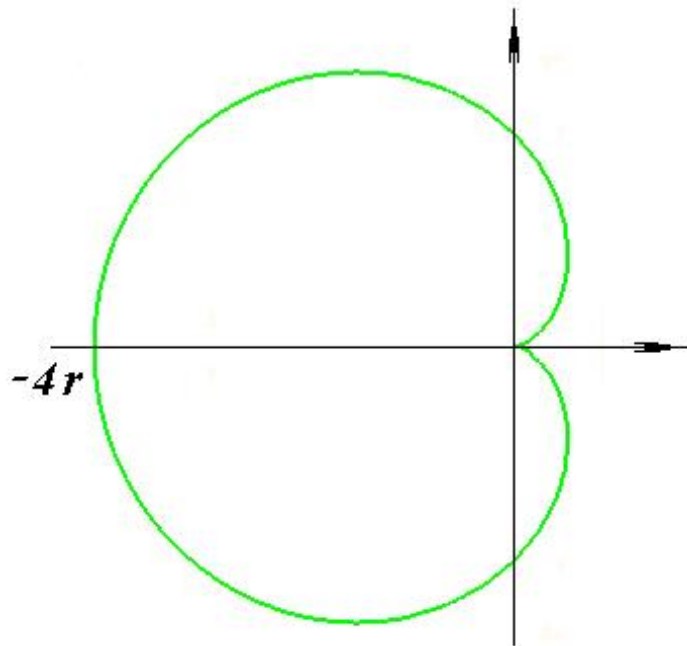


Кардіоїда як траєкторія

Уявімо, що коло C_1 радіусу r котиться по іншому колу C_2 радіуса r .

Зафіксуємо на колі C_1 довільну точку A і будемо відслідковувати її траєкторію під час вказаного руху.

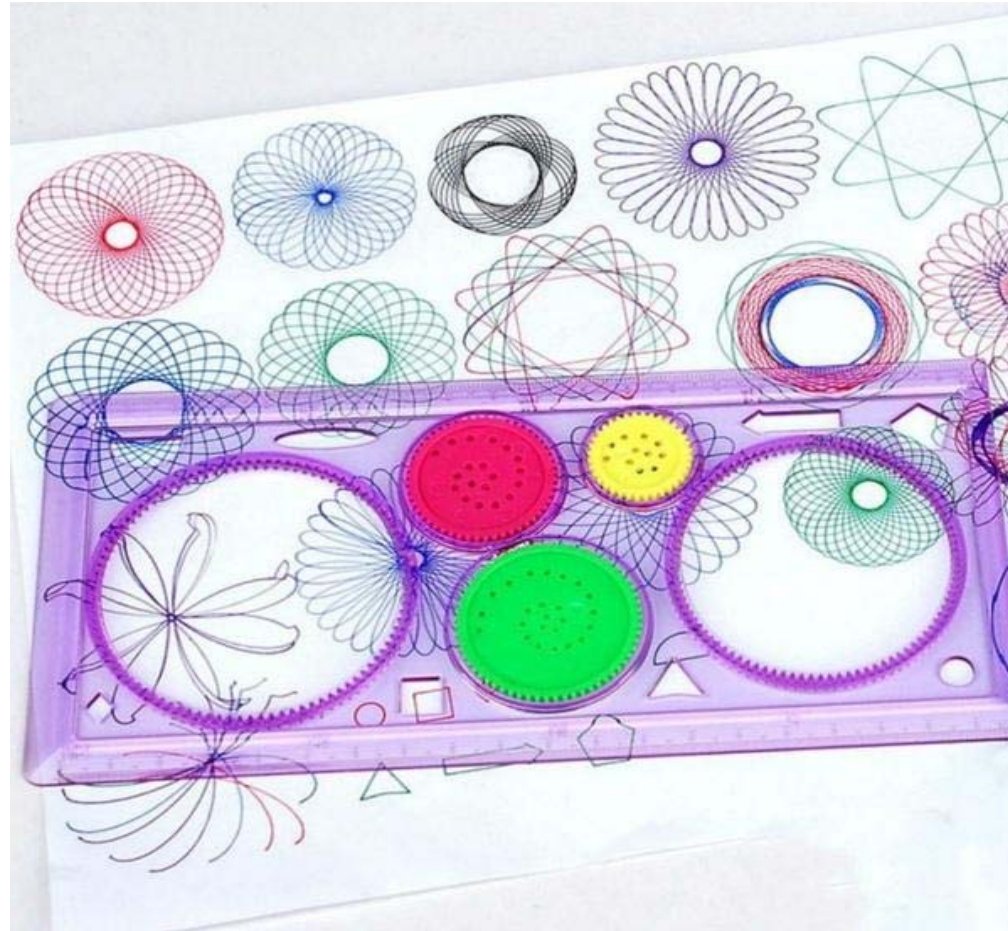
Виявляється, що траєкторією буде¹ саме *кардіоїда*



¹ З точністю до розташування на площині

Аналогічно, можна:

- 1) брати кола C_1 і C_2 різного радіусу,
- 2) котити коло C_1 «всередині» кола C_2 ,
- 3) точку A фіксувати не на самому колі C_1 , а всередині або назовні кола C_1 , але зберігаючи «прив'язаність» точки до кола.



Задача 0.1.2. Розглянемо неявно задану криву γ в площині \mathbb{R}^2

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ – двічі неперервно диференційована функція. Нехай $P(x_0,y_0)$ – точка на кривій γ . Запишіть розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$ в точці $P(x_0,y_0)$ з точністю до членів другого порядку. Проаналізуйте, як виглядає розкладення Тейлора у випадках, коли точка $P(x_0,y_0)$ є регулярною або сингулярною.

Розв'язання. Маємо

$$\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) + \dots$$

Точка $P(x_0,y_0)$ належить кривій γ , значить $\Phi(x_0,y_0)=0$. Тому маємо

$$\Phi(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) + \dots$$

Якщо крива γ є регулярною, $\nabla\Phi \neq 0$, то вона апроксимується прямою

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Ця пряма проходить через точку $P(x_0, y_0)$, а вектор $\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$, обчислений в точці $P(x_0, y_0)$, є нормальним вектором прямої.

Якщо ж крива γ не є регулярною і точка $P(x_0, y_0)$ є особливою, то в цій точці маємо $\nabla\Phi = 0$, тому

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Задача 0.3.1. Доведіть наступні властивості похідної вектор-функції:

$$1) \frac{d}{dt}(\vec{f} + \vec{h}) = \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$2) \frac{d}{dt}(\lambda\vec{f}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{f} + \lambda\frac{d\vec{f}}{dt}$$

$$3) \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \vec{f} \equiv \vec{c}$$

$$4.1) \frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle = \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \rangle$$

$$4.2) \frac{d}{dt} [\vec{f}, \vec{h}] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \right] + \left[\vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \right]$$

$$4.3) \frac{d}{dt} (\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{g}, \vec{h} \right) + \left(\vec{f}, \frac{d\vec{g}}{dt}, \vec{h} \right) + \left(\vec{f}, \vec{g}, \frac{d\vec{h}}{dt} \right)$$

Розв'язання.

$$4.1) \text{ Доведемо } \frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle = \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \rangle$$

Маємо

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n f^j h^j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{df^j}{dt} h^j + \sum_{j=1}^n f^j \frac{dh^j}{dt} = \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \rangle$$

Інший метод

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \vec{f}(t + \delta t), \vec{h}(t + \delta t) \rangle - \langle \vec{f}(t), \vec{h}(t) \rangle}{\delta t} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \vec{f}(t + \delta t), \vec{h}(t + \delta t) \rangle - \langle \vec{f}(t), \vec{h}(t + \delta t) \rangle + \langle \vec{f}(t), \vec{h}(t + \delta t) \rangle - \langle \vec{f}(t), \vec{h}(t) \rangle}{\delta t} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \vec{f}(t + \delta t) - \vec{f}(t), \vec{h}(t + \delta t) \rangle + \langle \vec{f}(t), \vec{h}(t + \delta t) - \vec{h}(t) \rangle}{\delta t} = \\ &= \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \rangle \end{aligned}$$

Задача 0.3.2.

1) Обчислити $\frac{d}{dt} |\vec{f}|$

2) Обчислити $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \right)$

3) Довести (або спростувати), що $|\vec{f}| \equiv \text{const} \Leftrightarrow \langle \vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \rangle \equiv 0$

4) Довести (або спростувати), що $[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існує сталий вектор \vec{C}

такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$.

5) Довести (або спростувати), що $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існують сталі вектори

\vec{C}, \vec{C}_0 такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{d}{dt} |\vec{f}| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle}} \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{f} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle}} \cdot (\langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{f} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \rangle) = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle}} \cdot \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{f} \rangle = \frac{1}{|\vec{f}|} \cdot \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{f} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Наслідок: } |\vec{f}| \equiv \text{const} \Leftrightarrow \langle \vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \rangle \equiv 0$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{f}|} \right) \vec{f} + \frac{1}{|\vec{f}|} \frac{d\vec{f}}{dt} = -\frac{1}{|\vec{f}|^2} \frac{d}{dt} (|\vec{f}|) \vec{f} + \frac{1}{|\vec{f}|} \frac{d\vec{f}}{dt} = \\ &= -\frac{1}{|\vec{f}|^2} \frac{1}{|\vec{f}|} \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{f} \rangle \vec{f} + \frac{1}{|\vec{f}|} \frac{d\vec{f}}{dt} = -\frac{1}{|\vec{f}|^3} \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{f} \rangle \vec{f} + \frac{1}{|\vec{f}|} \frac{d\vec{f}}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{Наслідок: } \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \right), \vec{f} \right\rangle = 0$$

$$4) \left[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \text{Існує сталий вектор } \vec{C} \text{ такий, що } \vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}.$$

Доведення. Нехай $\vec{f} \in C^1$, $\vec{f} \neq \vec{0}$

Маємо:

$$\left[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \text{Існує функція } \mu(t) \text{ така, що } \frac{d\vec{f}}{dt} = \mu \cdot \vec{f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{df^1}{dt} = \mu \cdot f^1 \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt} = \mu \cdot f^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^1 = C^1 \cdot \lambda(t) \\ \vdots \\ f^n = C^n \cdot \lambda(t) \end{cases}, \lambda(t) = e^{\int \mu(t) dt} \Leftrightarrow \vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$$

$$5) \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \text{існують сталі вектори } \vec{C}, \vec{C}_0 \text{ такі, що } \vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0.$$

Доведення. Нехай $\vec{f} \in C^2$, $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$

Покладемо $\vec{u}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}$. Маємо:

$$\left[\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \text{Існує сталий вектор } \vec{C} \text{ і функція } \lambda(t) \text{ такі, що } \vec{u}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \lambda(t) \cdot \vec{C} \Leftrightarrow \vec{u} = \int \lambda(t) dt \cdot \vec{C} + \vec{C}_0 \Leftrightarrow \vec{u} = \Lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0$$

1. Дотична пряма регулярної параметрично/неявно заданої кривої

Задача 1.1. Для наступних параметрично заданих кривих записати рівняння дотичної прямої в заданій точці:

1) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a + r \cos t \\ x^2 = b + r \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t = \frac{\pi}{4})$$

2) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=0)$$

3) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=0)$$

4) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=t_0)$$

5) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=t_0).$$

б) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \sin \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad \text{точка } P(t=t_0).$$

Задача 1.2. Розглянемо параметрично задану криву

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^4 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

1) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ , що проходять через точку $Q(-1, 0)$.

2) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ , що проходять паралельно до прямої $x^1 = x^2$.

Приклад. Для наступної параметрично заданої кривої

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = 2 \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

записати рівняння дотичної прямої в точці $P(t = \frac{\pi}{3})$.

Розв'язання. Радіус-вектор кривої

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$$

є C^∞ -гладкою вектор-функцією. Обчислимо її похідну:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$$

Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, задана крива є регулярною. Тому в кожній то-

чці на кривій існує і є єдиною дотична пряма.

Зокрема, дотична пряма в точці P проходить через цю точку, а $\frac{d\vec{f}}{dt}$ є її напрямним вектором.

Обчислюємо координати точки P :

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ 2 \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

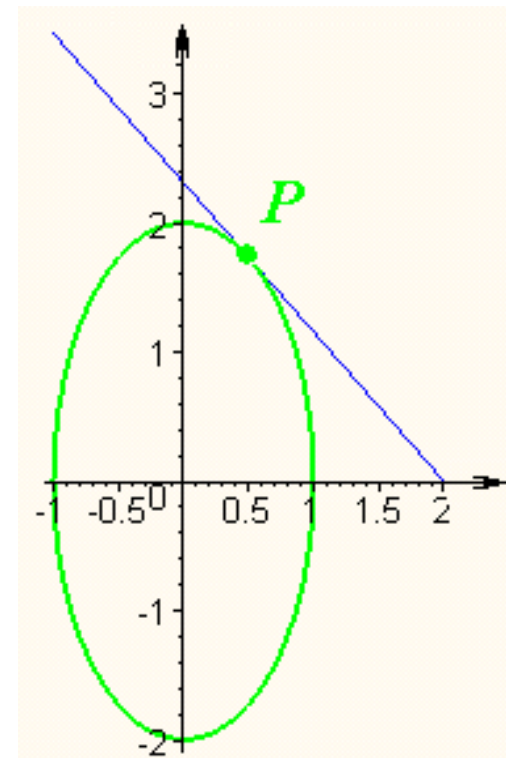
Обчислюємо координати напрямного вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}_P = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} \\ 2 \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо рівняння дотичної прямої кривої γ в точці P :

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - \sqrt{3}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Відповідь: $x^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$



Задача 1.2. Розглянемо неявно задану криву γ в площині:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 .$$

- 1) Запишіть рівняння дотичної прямої кривої γ в точці $P(\sqrt{2}, 0)$
- 2) Знайдіть дотичну пряму кривої γ , що проходить через точку $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- 3) Знайдіть дотичну пряму кривої γ , що проходить паралельно до горизонтальної координатної осі x

Приклад. Для наступної неявно заданої кривої на площині

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 10 = 0$$

записати рівняння дотичної прямої в заданій точці $P(3, 1)$.

Розв'язання. Запишемо відповідну функцію $\Phi(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 10$

Перевіримо, що точка $P(3, 1)$ належить кривій:

$$\Phi(3, 1) = 3^2 + 1^2 - 10 = 0$$

Обчислимо градієнт функції $\Phi(x^1, x^2)$:

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

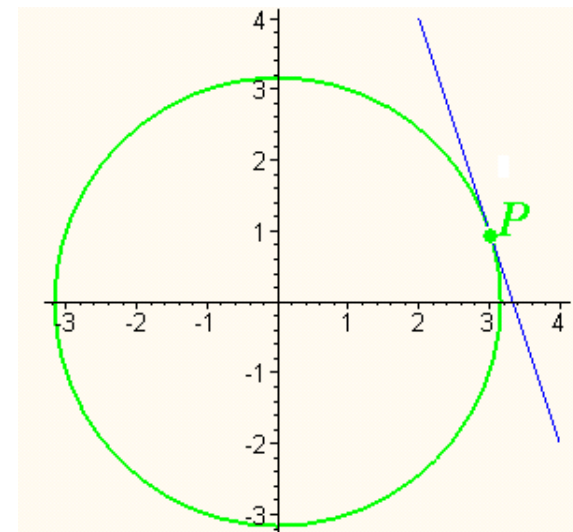
Обчислимо значення градієнта функції $\Phi(x^1, x^2)$ в точці $P(3, 1)$:

$$\nabla\Phi(3, 1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

це вектор нормалі шуканої прямої. Записуємо рівняння прямої:

$$6(x - 3) + 2(y - 1) = 0.$$

Відповідь: $6(x - 3) + 2(y - 1) = 0$.



2. Довжина регулярної параметрично заданої кривої

Задача 2. Обчислити довжину наступних параметрично заданих кривих:

$$1) \gamma: \begin{cases} x^1 = a + A \cos t \\ x^2 = b + B \sin t \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$2) \gamma: \begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-C, C)$$

$$3) \gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, t \in (-a, a)$$

$$4) \gamma: \begin{cases} x^1 = -2r \cos t (1 + \cos t) \\ x^2 = 2r \sin t (1 + \cos t) \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$5) \gamma: \begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, t \in (0, C)$$

$$6) \gamma: \begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$7) \gamma: \begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \sin \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, t \in (A, B)$$

Приклад. Обчислити довжину наступної параметрично заданої кривої

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, \quad t \in (a, b).$$

Розв'язання. Радіус-вектор кривої $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in C^\infty$ -гладкою вектор-функцією.

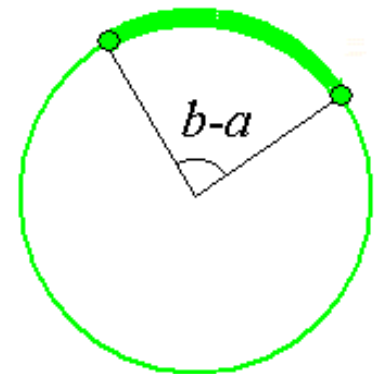
Обчислимо її похідну: $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, задана

крива є регулярною.

Обчислюємо довжину вектора швидкості (дотичного вектора): $\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = 1$

Обчислюємо довжину кривої: $L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_a^b dt = b - a$

Відповідь: $L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_a^b dt = b - a$



Додаткова задача 1.

1) Для трактриси (Задача 1.1, п.4) обчисліть довжину відрізка дотичної прямої від точки дотику прямої з трактрисою до точки перетину прямої з вертикальною координатною віссю x^2 .

2) Для гвинтової лінії в \mathbb{R}^3 (Задача 1.1, п.5) обчисліть кут, під яким дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 .

3) Для «гвинтової» кривої \mathbb{R}^4 (Задача 1.1, п.6) обчисліть кути, під якими дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 і горизонтальної координатної площини x^3x^4 .

Додаткова задача 2.

Як зміниться довжина кривої, якщо застосувати наступне перетворення в об'ємному просторі \mathbb{R}^n :

- 1) паралельний перенос,
- 2) обертання,
- 3) гомотетія з коефіцієнтом λ ?

Задача 6.1с. Знайдемо довжину дуги пласкої кривої

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

між точками, що відповідають довільним значенням параметра $t = t_1$ і $t = t_2$, $t_1 \leq t_2$. Тут $a > 0$. Позначимо відповідну вектор-функцію через r , продиференціюємо і знайдемо довжину:

$$\begin{aligned} r &= a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), \\ r' &= a(-\sin t + \sin t + t \cos t, \cos t - \cos t + t \sin t) = at(\cos t, \sin t), \\ |r'| &= \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} = a|t|. \end{aligned}$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)| dt = a \int_{t_1}^{t_2} |t| dt.$$

Зокрема, для невід'ємних t_1 і t_2 це буде

$$a \int_{t_1}^{t_2} t dt = a \frac{t^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2),$$

а для випадку $t_1 \leq 0 \leq t_2$ –

$$a \int_{t_1}^0 (-t) dt + a \int_0^{t_2} t dt = -a \frac{t^2}{2} \Big|_{t_1}^0 + a \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_2} = \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2).$$

Випадок недодатних t_1 і t_2 розглянути самостійно.

Задача 6.2а. Знайдемо довжину дуги явно заданої пласкої кривої

$$y = \ln \cos x$$

на проміжку $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Зауважимо, що у загальному випадку явно задану криву $y = f(x)$ можна розглядати як параметрично задану з параметром x :

$$r = (x, f), \quad r' = (1, f'), \quad |r'| = \sqrt{1 + f'^2}.$$

У нас $f' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg}x$, тому довжина дорівнює

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx.$$

Оскільки $\cos x > 0$ для $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} dx.$$

Зробимо заміну $\xi = \frac{\pi}{2} - x$. Зауважимо, що $d\xi = -dx$, тому образи меж інтегрування поміняються місцями:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \xi} d\xi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2}} d\xi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\sin \frac{\xi}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\xi}{2}} d\xi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2}} d \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \ln \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Задача 6.6. Знайдемо довжину дуги пласкої кривої, що задана загальним рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Перейдемо спочатку до декартових координат, записавши вектор-функцію, що відповідає кривій, у вигляді

$$r(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi).$$

Тобто крива задана параметрично з параметром φ . Далі діємо як раніше:

$$\begin{aligned} r' &= (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi), \\ |r'| &= \sqrt{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}, \\ L &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |r'(\varphi)| d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Задача 6.8а. Тут потрібно знайти довжину всієї замкненої кривої (кардіоїди), що задана рівнянням у полярних координатах $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (де $a > 0$, оскільки радіус повинен бути невід'ємним). Період цієї функції дорівнює 2π , тому, щоб пройти всю криву, можна взяти $\varphi \in [0, 2\pi]$. Далі просто підставимо в готову формулу з попередньої задачі:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin \varphi)^2 + (a(1 + \cos \varphi))^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 + 2a^2 \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi. \end{aligned}$$

Тут $\cos \frac{\varphi}{2} \geq 0$ для $\varphi \in [0, \pi]$ і $\cos \frac{\varphi}{2} \leq 0$ для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, тому

$$\begin{aligned} L &= 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - 2a \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} - 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \\ &= 4a(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2}) = 8a. \end{aligned}$$