1. Неявно задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Задача 1.1. Побудуйте неявно задану криву в $\mathbb{R}^2$, перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність:

1) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
2) $y - \sin x = 0$
3) $x^2 + y^2 = 0$
3*) $x^2 + y^2 - C = 0$, $C \neq 0$
4) $x^2 - y^2 = 0$
4*) $x^2 - y^2 - C = 0$, $C \neq 0$
5) $xy = 0$
5*) $xy - C = 0$, $C \neq 0$
6) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$
6*) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - C = 0$, $C \neq 0$
7) $x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 + y^4 = 0$
8) $x^2 y - y^3 = 0$

Приклад 1. Розглянемо криву, неявно задану рівнянням

$$x^2 - y^2 = 0$$

Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = x^2 - y^2$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\,x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

$$\Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Якщо ця система не має розв’язків, то крива є регулярною.

Якщо ж система має розв’язки, то крива не є регулярою і містить особливі (сингулярні) точки.

Маємо

$$x^2 - y^2 = 0,$$
$$2x = 0,$$
$$-2y = 0.$$

Ця система має єдиний розв'язок $x=0$, $y=0$.

Значить, задана крива не є регулярною і має одну особливу точку $P(0,0)$.

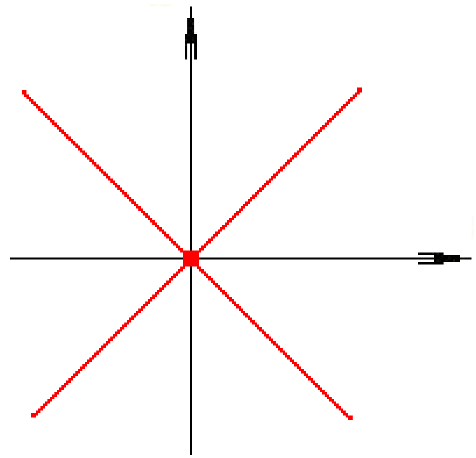
Щоб зобразити криву, зауважимо, що

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

тому крива задається неявно рівнянням

$$(x-y)(x+y) = 0,$$

тобто, або $x=y$, або $x=-y$.



Приклад 2. Розглянемо криву, неявно задану рівнянням

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,(x^2 - y^2) = 0$$

Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2\,(x^2 - y^2)$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4x\,(x^2 + y^2) - 4\,x = 4x\,(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y\,(x^2 + y^2) + 4\,y = 4y\,(x^2 + y^2 - 1)$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

$$\Phi = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$$

Якщо ця система не має розв’язків, то крива є регулярною.

Якщо ж система має розв’язки, то крива не є регулярою і містить особливі (сингулярні) точки.

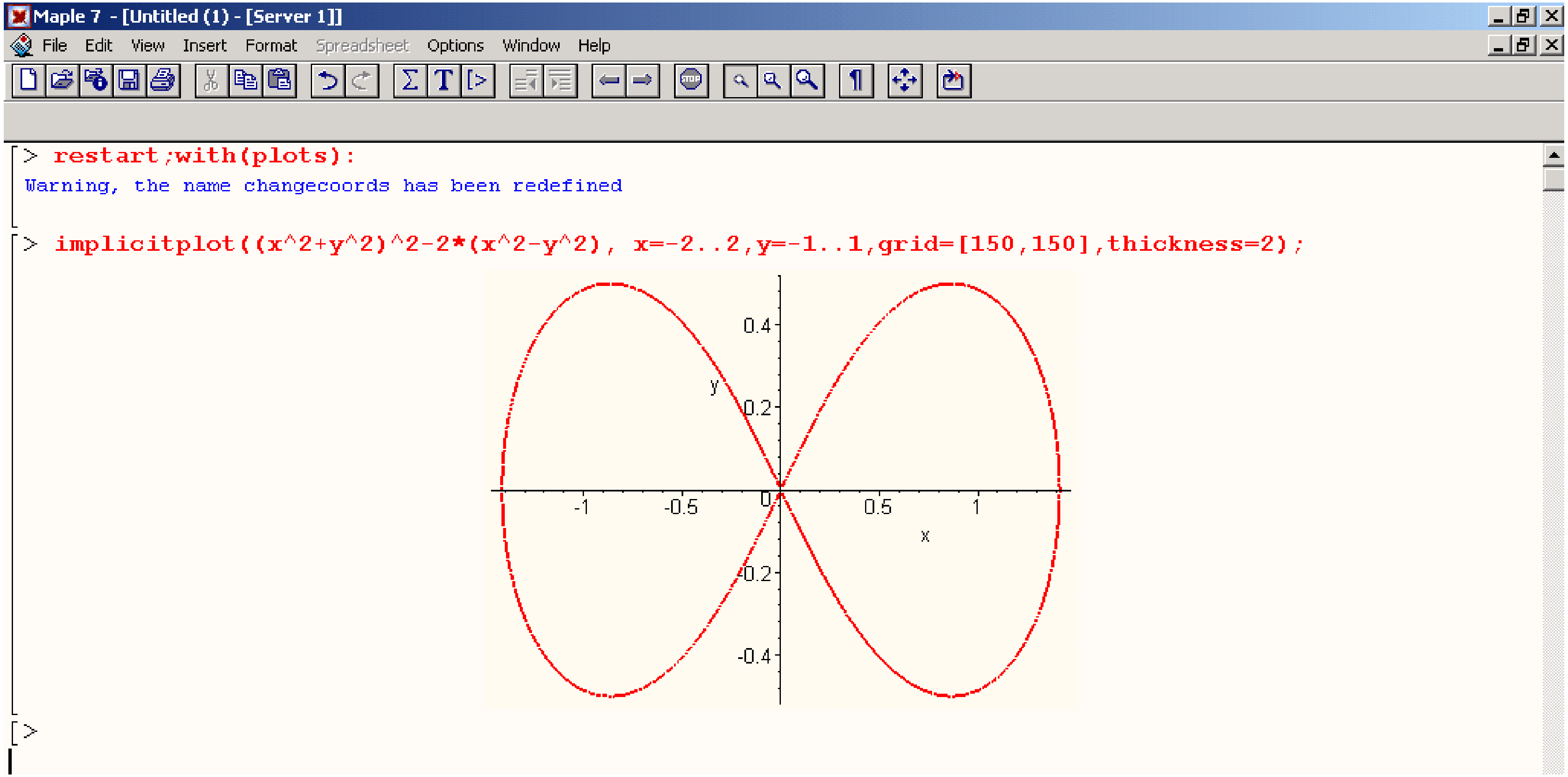
Маємо

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,(x^2 - y^2) = 0,$$
$$4\,x\,(x^2 + y^2 - 1) = 0\ ,$$
$$4\,y\,(x^2 + y^2 - 1) = 0\ .$$

Ця система має розв’язок $x=0$, $y=0$.

Значить, задана крива не є регулярною і має особливу точку $P(0,0)$.

(Доведіть, що інших розв’язків /інших особливих точок немає.)



Задача 1.2. Розглянемо неявно задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ – двічі неперервно диференційована функція. Нехай $P(x_0,y_0)$ – точка на кривій γ. Запишіть розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$ в точці $P(x_0,y_0)$ з точністю до членів другого порядку. Проаналізуйте, як виглядає розкладення Тейлора у випадках, коли точка $P(x_0,y_0)$ є регулярною або сингулярною – чим відрізняється сингулярний випадок від регулярного в термінах розкладання Тейлора?

2. Параметрично задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Задача 2.1. Побудуйте параметрично задану криву в $\mathbb{R}^2$, перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність. Проаналізуйте, як точка рухається по заданій кривій з плином часу *t*.

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

2) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^3 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

3) $\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

4) $\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^4 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

5) $\begin{cases} x^1 = t^3 \\ x^2 = t^5 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

6) $\begin{cases} x^1 = a + A\cos t \\ x^2 = b + B\sin t \end{cases}, \ t \in (\alpha, \beta)$

7) $\begin{cases} x^1 = A\cosh t \\ x^2 = A\sinh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

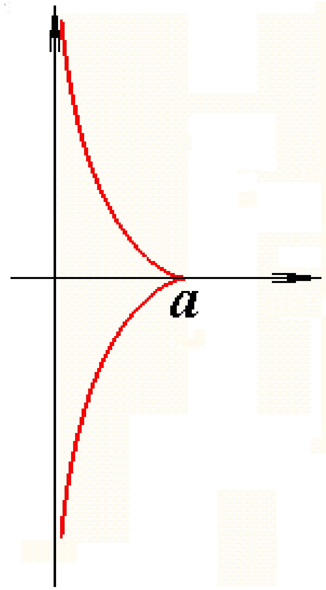
8) $\begin{cases} x^1 = \cos Mt \\ x^2 = \sin Nt \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

9) $\begin{cases} x^1 = 1/\cosh t \\ x^2 = t - \tanh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

10) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

Приклад 1. Розглянемо криву γ, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Крива γ називається *трактрисою*.

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, відповідна точка рухається по трактрисі знизу вгору, в момент $t=0$ точка опиняється на «вістрі» трактриси.

Проаналізуємо регулярність кривої γ. Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a/\cosh t \\ a(t - \tanh t) \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є C^∞-гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -a \sinh t / \cosh^2 t \\ a(1 - 1/\cosh^2 t) \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -a\sinh t/\cosh^2 t \\ a(1-1/\cosh^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} -a\sinh t/\cosh^2 t = 0 \\ a(1-1/\cosh^2 t) = 0 \end{cases}$$

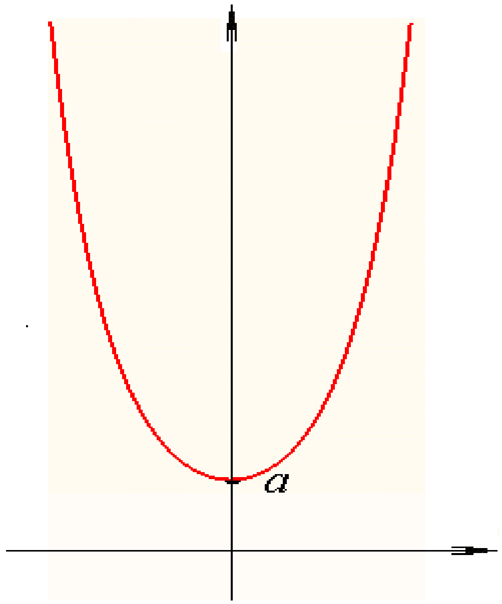
Система має єдиний розв'язок *t=0*. Цей розв'язок відповідає сингулярній точці P на трактрисі γ. Радіус-вектор цієї точки дорівнює:

$$\vec{x}_P = \vec{f}(0) = \begin{pmatrix} a/\cosh 0 \\ a(0-\tanh 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже трактриса γ має єдину сингулярну точку $P(a,0)$. Це якраз «вістря» трактриси.

Приклад 2. Розглянемо криву, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Крива називається *ланцюговою лінією*

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, відповідна точка рухається по кривій зліва направо, в момент $t=0$ точка опиняється в найнижчому положенні на кривій.

Перевіримо, що ця крива є регулярною. Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a\,t \\ a\cosh t \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є C^∞-гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ a\sinh t \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ a\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} a = 0 \\ \sinh t = 0 \end{cases}$$

Ця система не має розв'язків, тобто, похідна $\frac{d\vec{f}}{dt}$ не обертається в нуль. Значить, крива γ не містить сингулярних точок.

Таким чином, крива γ є регулярною параметрично заданою кривою.

3. Аналітичні властивості вектор функцій

Розглянемо вектор-функцію

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}, \ t \in (a,b).$$

Визначення. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0$ означає наступне:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ |\vec{f}(t) - \vec{f}_0| < \varepsilon$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \ldots + (f^n(t) - f_0^n)^2} < \varepsilon$$

Твердження. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0 \ \Leftrightarrow \ \begin{matrix} \lim\limits_{t \to t_0} f^1(t) = f_0^1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{t \to t_0} f^n(t) = f_0^n \end{matrix}$

Твердження. $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \lim\limits_{t\to t_0} f^1(t) = f_0^1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to t_0} f^n(t) = f_0^n \end{matrix}$

Доведення.

$\Rightarrow$) Маємо $| f^j(t) - f_0^j | < \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \ldots + (f^n(t) - f_0^n)^2} \quad \forall\, 1 \le j \le n$

Тому з

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \ldots + (f^n(t) - f_0^n)^2} < \varepsilon$$

витікає

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; | f^j(t) - f_0^j | < \varepsilon \quad \forall\, 1 \le j \le n$$

Тобто, з

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0$$

витікає

$$\lim_{t\to t_0} f^j(t) = f_0^j \quad \forall\, 1 \le j \le n$$

$\Rightarrow$) Маємо $\sqrt{(f^1(t)-f_0^1)^2+\ldots+(f^n(t)-f_0^n)^2} \le \sqrt{n}\max_j |f^j(t)-f_0^j|$

Нехай

$$\lim_{t\to t_0} f^j(t)=f_0^j \quad \forall\, 1\le j\le n$$

Це означає, що для кожного $1\le j\le n$ виконано

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_j>0:\ |t-t_0|<\delta_j \ \Rightarrow\ |f^j(t)-f_0^j|<\varepsilon$$

Візьмемо $\delta=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$. Тоді для кожного $1\le j\le n$ виконано

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |t-t_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f^j(t)-f_0^j|<\varepsilon$$

Звідси витікає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |t-t_0|<\delta \ \Rightarrow\ \sqrt{(f^1(t)-f_0^1)^2+\ldots+(f^n(t)-f_0^n)^2}<\varepsilon$$

А це і означає, що

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}_0$$

Похідна вектор-функції

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f^1(t)-f^1(t_0)}{t-t_0}\\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f^n(t)-f^n(t_0)}{t-t_0}\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{df^1}{dt}\\ \vdots \\ \dfrac{df^n}{dt}\end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}=\begin{pmatrix}\dfrac{d^2f^1}{dt^2}\\ \vdots \\ \dfrac{d^2f^n}{dt^2}\end{pmatrix},\ \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}=\begin{pmatrix}\dfrac{d^3f^1}{dt^3}\\ \vdots \\ \dfrac{d^3f^n}{dt^3}\end{pmatrix},\ \ldots$$

Задача 3.1. Доведіть наступні властивості похідної вектор-функції:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{h})=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{h}}{dt}$

2) $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{f})= \frac{d\lambda}{dt}\vec{f}+\lambda\frac{d\vec{f}}{dt}$

3) $\frac{d\vec{f}}{dt}\equiv\vec{0}\Leftrightarrow\vec{f}\equiv\vec{c}$

4.1) $\frac{d}{dt}<\vec{f},\vec{h}> \ = \ <\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}>+<\vec{f},\frac{d\vec{h}}{dt}>$

4.2) $\frac{d}{dt}[\vec{f},\vec{h}\,] \ = \ [\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}\,]+[\vec{f},\frac{d\vec{h}}{dt}\,]$

4.3) $\frac{d}{dt}(\vec{f},\vec{g},\vec{h}\,)=(\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{g},\vec{h}\,)+(\vec{f},\frac{d\vec{g}}{dt},\vec{h}\,)+(\vec{f},\vec{g},\frac{d\vec{h}}{dt}\,)$

Підказка. Застосувати координатну запис.

Приклад. Доведемо $\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{h})=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{h}}{dt}$

Маємо

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{h})=\frac{d}{dt}\left(\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}\right)=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f^1+h^1 \\ \vdots \\ f^n+h^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(f^1+h^1) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}(f^n+h^n) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt}+\frac{dh^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt}+\frac{dh^n}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{dh^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dh^n}{dt} \end{pmatrix}=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{h}}{dt}$$

Задача 3.2.

1) Обчислити $\dfrac{d}{dt}|\vec{f}|$

2) Обчислити $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{f}}{|\vec{f}|}\right)$

3) Довести (або спростувати), що $|\vec{f}| \equiv const \;\Leftrightarrow\; <\vec{f}, \dfrac{d\vec{f}}{dt}> \equiv 0$

4) Довести (або спростувати), що $[\vec{f}, \dfrac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \;\Leftrightarrow\;$ існує сталий вектор $\vec{C}$ такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t)\cdot\vec{C}$.

5) Довести (або спростувати), що $[\dfrac{d\vec{f}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \equiv \vec{0} \;\Leftrightarrow\;$ існують сталі вектори $\vec{C}$, $\vec{C}_0$ такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t)\cdot\vec{C}+\vec{C}_0$.