Варіант 1

1. Довести, що якщо для підмножини A топологічного простору $x \in A'$ і $x \notin A$, то $x \in \partial A$.

2. Довести, що відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ замкнене тоді й тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$ для будь-якої підмножини $A \subset X$.

Варіант 2

1. Довести, що для будь-яких підмножин A і B топологічного простору $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. Показати, що обернене включення, взагалі кажучи, невірне.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 3

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{Int} B_\alpha \supset \operatorname{Int} \left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \right).$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінене рівністю.

2. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що графіки всіх неперервних відображень одного й того ж простору гомеоморфні між собою.

Варіант 4

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що $\partial \left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i \right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^n \partial B_i$. Показати, що це не так для довільної кількості множин і що обернене включення невірне (у загальному випадку).

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 5

1. Нехай $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ – інтегровні функції. Позначимо

$$\rho(f, g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Чи буде ρ метрикою

- на множині інтегровних на $[0, 1]$ функцій?
- на множині неперервних на $[0, 1]$ функцій?

2. Нехай X – замкнений квадрат у площині зі стандартною топологією, Y – одна з його сторін, $f\colon X \to Y$ – ортогональне проектування. Показати, що f неперервне, відкрите і замкнене.

Варіант 6

1. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

2. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f\colon X \to A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A у цьому випадку називається ретрактом X. Довести, що будь-який ретракт хаусдорфового простору замкнений.

Варіант 7

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\operatorname{Int} A}$. Показати, що замикання відкритої множини канонічно замкнене.

2. Нехай $f_1\colon X_1 \to Y_1,\ f_2\colon X_2 \to Y_2$ – відображення топологічних просторів. Тоді відображення $f\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, що визначене формулою

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

позначається $f_1 \times f_2$ і називається прямим добутком відображень, а самі відображення – множниками. Довести, що $f_1 \times f_2$ відкрите тоді й тільки тоді, коли відкриті його множники.

Варіант 8

1. Довести, що межа відкритої множини ніде не щільна.

2. Нехай X і Y – топологічні простори, $A \subset X$, $B \subset Y$. Показати, що в $X \times Y$ $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Вивести з цього, що прямий добуток сепарабельних просторів сепарабельний.

Варіант 9

1. Нехай A і B – підмножини топологічного простору, A відкрита і $A \cap B = \varnothing$. Довести, що тоді $\overline{A} \cap \operatorname{Int} \overline{B} = \varnothing$.

2. Побудувати гомеоморфізм між просторами $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ і $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

Варіант 10

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int} \overline{A}$. Довести, що для канонічно відкритих A і B включення $A \subset B$ еквівалентне $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 < x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 11

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right)} = \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha}\right)}.$$

2. Побудувати гомеоморфізм між еліпсоїдом $\left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{(x^i)^2}{(a^i)^2} = 1\right\}$ і n-вимірною сферою S^n.

Варіант 12

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int}\overline{A}$. Довести, що внутрішність замкненої множини канонічно відкрита.

2. Довести, що метрика $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ є неперервним відображенням (на X розглядається метрична топологія, а на $X \times X$ – топологія прямого добутку).

Варіант 13

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору X. Довести, що $\left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i\right)' = \bigcup\limits_{i=1}^n B_i'$. Чи вірно це для довільної кількості множин?

2. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що f неперервне тоді й тільки тоді, коли обмеження канонічної проекції $p_X\colon X \times Y \to X$ на Γ_f є гомеоморфізмом.

Варіант 14

1. Нехай ρ – метрика на множині X. Довести, що $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$ також задає метрику на X, і їхні метричні топології співпадають. Тому будь-який метричний простір гомеоморфний метричному простору скінченного діаметра.

2. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f\colon X \to A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A у цьому випадку називається ретрактом X. Довести, що A є ретрактом X тоді й тільки тоді, коли для будь-якого топологічного простору Y будь-яке неперервне відображення $f\colon A \to Y$ може бути продовжене на весь простір X.

Варіант 15

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що $\partial\left(\bigcap\limits_{i=1}^n B_i\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^n \partial B_i$. Показати, що це не так для довільної кількості множин і що обернене включення невірне (у загальному випадку).

2. Довести, що бієктивне відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $f(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} f(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset X$.

Варіант 16

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \operatorname{Int}\left(\bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{Int} B_\alpha\right).$$

2. Показати, що для бієктивного відображення $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ гомеоморфність еквівалентна кожній з умов:

- $\mathcal{T}$ – найслабша з топологій на X, для яких відображення f неперервне;
- $\mathcal{S}$ – найсильніша з топологій на Y, для яких відображення f неперервне.

Варіант 17

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int}\overline{A}$. Показати, що перетин двох канонічно відкритих множин канонічно відкритий, а об'єднання двох канонічно відкритих множин може не бути канонічно відкритим.

2. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що $f\colon X \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли неперервне відображення $h\colon X \to \Gamma_f$, що визначене умовою $h(x) = (x, f(x))$.

Варіант 18

1. Довести, що в $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою відкрита куля є замкненою множиною тоді й тільки тоді, коли її радіус ірраціональний. Чи вірне аналогічне твердження для замкненої кулі, що є відкритою множиною?

2. Нехай X – відкритий квадрат у площині зі стандартною топологією, Y – одна з його сторін, $f\colon X \to Y$ – ортогональне проектування. Показати, що f неперервне, відкрите, але не замкнене.

Варіант 19

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\operatorname{Int} A}$. Довести, що для канонічно замкнених A і B включення $A \subset B$ еквівалентне $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

2. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що якщо Y хаусдорфовий і $f\colon X \to Y$ неперервне, то Γ_f замкнена в $X \times Y$.

Варіант 20

1. Показати, що наступні дві метрики породжують різні топології на $C([0, 1])$. Чи є якась із них сильнішою за іншу?

$$\rho_1(f, g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| dx,\ \rho_2(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| | x \in [0, 1]\}.$$

2. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів, Y хаусдорфовий і $A \subset X$ всюди щільна. Довести, що якщо $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

Варіант 21

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\operatorname{Int} A}$. Показати, що об'єднання двох канонічно замкнених множин канонічно замкнене, а перетин двох канонічно замкнених множин може не бути канонічно замкненим.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x \geqslant y \geqslant 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 22

1. Довести, що підмножина U топологічного простору X відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $U \cap V$ відкрита у V (як у підпросторі X).

2. Нехай X – хаусдорфовий топологічний простір, і $f\colon X \to X$ неперервне. Довести, що підмножина $A = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнена в X.

Варіант 23

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int} \overline{A}$, і канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\operatorname{Int} A}$. Показати, що множина канонічно замкнена тоді й тільки тоді, коли її доповнення канонічно відкрите.

2. Довести, що бієктивне відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ для будь-якої підмножини $A \subset X$.

Варіант 24

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\bigcup_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha} \subset \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right)}.$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінене рівністю.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ і $Y = \{(x,y) | a < x^2 + y^2 < b\}$ (для будь-яких $0 \leqslant a < b$) площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 25

1. Нехай ρ – метрика на множині X. Довести, що $\rho'(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho(x,y)+1}$ також задає метрику на X, і їхні метричні топології співпадають. Тому будь-який метричний простір гомеоморфний метричному простору скінченного діаметра.

2. Нехай $f_1\colon X_1 \to Y_1,\ f_2\colon X_2 \to Y_2$ – відображення топологічних просторів. Тоді відображення $f\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, що визначене формулою

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

позначається $f_1 \times f_2$ і називається прямим добутком відображень, а самі відображення – множниками. Довести, що $f_1 \times f_2$ неперервне тоді й тільки тоді, коли неперерервні його множники.

Варіант 26

1. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ і $Y = \{(x,y) | x^2 + y^2 > 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

2. Довести, що відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ відкрите тоді й тільки тоді, коли $f(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Int} f(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset X$.

Варіант 27

1. Довести, що для будь-яких підмножин A і B топологічного простору $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. Показати, що обернене включення, взагалі кажучи, невірне.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x,y) | 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 28

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що $\partial \left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i \right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^n \partial B_i$. Показати, що це не так для довільної кількості множин і що обернене включення невірне (у загальному випадку).

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x,y) | 0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 29

1. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

2. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f\colon X \to A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A у цьому випадку називається ретрактом X. Довести, що будь-який ретракт хаусдорфового простору замкнений.

Варіант 30

1. Довести, що межа відкритої множини ніде не щільна.

2. Нехай X і Y – топологічні простори, $A \subset X$, $B \subset Y$. Показати, що в $X \times Y$ $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Вивести з цього, що прямий добуток сепарабельних просторів сепарабельний.

Варіант 31

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int} \overline{A}$. Довести, що для канонічно відкритих A і B включення $A \subset B$ еквівалентне $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 < x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 32

1. Нехай ρ – метрика на множині X. Довести, що $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$ також задає метрику на X, і їхні метричні топології співпадають. Тому будь-який метричний простір гомеоморфний метричному простору скінченного діаметра.

2. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f\colon X \to A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A у цьому випадку називається ретрактом X. Довести, що A є ретрактом X тоді й тільки тоді, коли для будь-якого топологічного простору Y будь-яке неперервне відображення $f\colon A \to Y$ може бути продовжене на весь простір X.

Варіант 33

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \operatorname{Int} \overline{A}$. Довести, що внутрішність замкненої множини канонічно відкрита.

2. Довести, що метрика $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ є неперервним відображенням (на X розглядається метрична топологія, а на $X \times X$ – топологія прямого добутку).

Варіант 34

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \operatorname{Int}\left(\bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{Int} B_\alpha\right).$$

2. Показати, що для бієктивного відображення $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ гомеоморфність еквівалентна кожній з умов:

- $\mathcal{T}$ – найслабша з топологій на X, для яких відображення f неперервне;
- $\mathcal{S}$ – найсильніша з топологій на Y, для яких відображення f неперервне.

Варіант 35

1. Довести, що в $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою відкрита куля є замкненою множиною тоді й тільки тоді, коли її радіус ірраціональний. Чи вірне аналогічне твердження для замкненої кулі, що є відкритою множиною?

2. Нехай X – відкритий квадрат у площині зі стандартною топологією, Y – одна з його сторін, $f\colon X \to Y$ – ортогональне проектування. Показати, що f неперервне, відкрите, але не замкнене.

Варіант 36

1. Показати, що наступні дві метрики породжують різні топології на $C([0,1])$. Чи є якась із них сильнішою за іншу?

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx, \; \rho_2(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| | x \in [0,1]\}.$$

2. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів, Y хаусдорфовий і $A \subset X$ всюди щільна. Довести, що якщо $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

Варіант 37

1. Довести, що підмножина U топологічного простору X відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $U \cap V$ відкрита у V (як у підпросторі X).

2. Нехай X – хаусдорфовий топологічний простір, і $f\colon X \to X$ неперервне. Довести, що підмножина $A = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнена в X.

Варіант 38

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\bigcup_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha} \subset \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right)}.$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінене рівністю.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ і $Y = \{(x,y) | a < x^2 + y^2 < b\}$ (для будь-яких $0 \leqslant a < b$) площини $\mathbb{R}^2$.

Варіант 39

1. Нехай $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ – інтегровні функції. Позначимо

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Чи буде ρ метрикою

- на множині інтегровних на $[0,1]$ функцій?
- на множині неперервних на $[0,1]$ функцій?

2. Нехай X – замкнений квадрат у площині зі стандартною топологією, Y – одна з його сторін, $f\colon X \to Y$ – ортогональне проектування. Показати, що f неперервне, відкрите і замкнене.

Варіант 40

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\bigcap_{\alpha\in A} \operatorname{Int} B_\alpha \supset \operatorname{Int}\left(\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha\right).$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінене рівністю.

2. Нехай $f\colon X\to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f\subset X\times Y$ вигляду

$$\Gamma_f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що графіки всіх неперервних відображень одного й того ж простору гомеоморфні між собою.

Варіант 41

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A=\overline{\operatorname{Int} A}$. Довести, що для канонічно замкнених A і B включення $A\subset B$ еквівалентне $\operatorname{Int} A\subset \operatorname{Int} B$.

2. Нехай $f\colon X\to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f\subset X\times Y$ вигляду

$$\Gamma_f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що якщо Y хаусдорфовий і $f\colon X\to Y$ неперервне, то Γ_f замкнена в $X\times Y$.

Варіант 42

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що $\partial\left(\bigcap\limits_{i=1}^n B_i\right)\subset\bigcup\limits_{i=1}^n \partial B_i$. Показати, що це не так для довільної кількості множин і що обернене включення невірне (у загальному випадку).

2. Довести, що бієктивне відображення топологічних просторів $f\colon X\to Y$ є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $f(\operatorname{Int} A)=\operatorname{Int} f(A)$ для будь-якої підмножини $A\subset X$.

Варіант 43

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A=\operatorname{Int}\overline{A}$. Показати, що перетин двох канонічно відкритих множин канонічно відкритий, а об'єднання двох канонічно відкритих множин може не бути канонічно відкритим.

2. Нехай $f\colon X\to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f\subset X\times Y$ вигляду

$$\Gamma_f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що $f\colon X\to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли неперервне відображення $h\colon X\to\Gamma_f$, що визначене умовою $h(x)=(x,f(x))$.

Варіант 44

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сукупність підмножин топологічного простору. Довести, що

$$\overline{\left(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\right)} = \overline{\left(\bigcup_{\alpha\in A} \overline{B_\alpha}\right)}.$$

2. Побудувати гомеоморфізм між еліпсоїдом $\left\{(x^1,\dots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{(x^i)^2}{(a^i)^2}=1\right\}$ і n-вимірною сферою S^n.

Варіант 45

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – скінченна сукупність підмножин топологічного простору X. Довести, що $\left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i\right)' = \bigcup\limits_{i=1}^n B_i'$. Чи вірно це для довільної кількості множин?

2. Нехай $f\colon X\to Y$ – відображення топологічних просторів. Тоді підмножина $\Gamma_f\subset X\times Y$ вигляду

$$\Gamma_f=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$$

називається графіком відображення f. Довести, що f неперервне тоді й тільки тоді, коли обмеження канонічної проекції $p_X\colon X\times Y\to X$ на Γ_f є гомеоморфізмом.

Варіант 46

1. Нехай A і B – підмножини топологічного простору, A відкрита і $A\cap B=\varnothing$. Довести, що тоді $\overline{A}\cap\operatorname{Int}\overline{B}=\varnothing$.

2. Побудувати гомеоморфізм між просторами $\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^k$ і $S^{n-k-1}\times\mathbb{R}^{k+1}$.