Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Г. Ч. Курінний, О. О. Шугайло

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2012

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5(я7)
К 93

Рецензенти:

О. Л. Ямпольський – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

В. О. Горькавий – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України.

Затверджено до друку рішенням Навчально-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 4 від 11.05.2012 р)

Курінний Г. Ч.

К 93 Елементи лінійної алгебри в курсі аналітичної геометрії : навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету / Г. Ч. Курінний, О. О. Шугайло. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. – 35 с.

Навчальний посібник призначено для оптимізації процесу вивчення студентами першого курсу механіко-математичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна деяких важливих алгебричних понять і фактів, та застосування їх в курсі аналітичної геометрії. Наведені також вправи з відповідями для самоперевірки студентів.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5(я7)

Зміст

Вступ

Мета цього навчально-методичного посібника – надати допомогу студентам першого курсу механіко-математичного факультету ХНУ імені В. Н. Каразіна при засвоєнні та самостійному вивченні окремих тем вищої алгебри, що застосовуються в аналітичній геометрії, особливо якщо вони застосовуються в геометрії раніше ніж докладно вивчаються в курсі вищої алгебри.

У першому розділі цього посібника наведені деякі відомості з алгебри, а саме: визначення матриці, приклади матриць, дії з матрицями, визначення оберненої матриці, метод Гауса знаходження оберненої матриці, метод Гауса рішення систем лінійних рівнянь, визначення та властивості детермінанта матриці. Всі визначення та властивості проілюстровані на прикладах.

У другому розділі розглянуті ті теми першого семестру аналітичної геометрії, які використовують поняття матриці, визначника матриці та інші алгебричні поняття.

Також наведені вправи з відповідями для самоперевірки студентів.

1 Деякі відомості з алгебри

1.1 Матриці. Визначення та окремі типи

Матрицею називають прямокутну таблицю. Елементи матриці належать певній множині M. Ми будемо розглядати числові матриці, тобто матриці над полем дійсних чисел.

Приклади матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 11 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

Матриці $A,\ F$ мають по одному рядку – це матриці-рядки. Матриці $D,\ G$ мають по одному стовпчику – це матриці-стовпчики. Матриця C має однакову кількість рядків і стовпчиків (їх три) – це квадратна матриця.

Невизначені елементи матриць звичайно позначаються символами з двома індексами: перший індекс показує номер рядка, а другий — номер стовпчика, в якому цей елемент стоїть. Так, якщо елемент матриці записаний у вигляді a_{23}, то він стоїть в 2 рядку і 3 стовпчику. В загальному випадку, якщо матриця A

має n рядків і m стовпчиків:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} = (a_{ij})_{n\times m}.$$

Визначення

1. Дві матриці $A = (a_{ij})_{n\times m}$ і $B = (b_{ij})_{n\times m}$ називаються *рівними*, якщо елементи на однакових місцях співпадають, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

2. Якщо $n = m$, то матриця називається *квадратною порядку* n.

3. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю то таку матрицю називають *нульовою.* $O_{n\times m} = (0)_{n\times m}$. Нульова матриця може бути прямокутною, квадратною.

4. У квадратній матриці елементи матриці, які стоять на перетині рядків і стовпчиків з однаковими номерами, називаються *діагональними.* Усі діагональні елементи утворюють *головну діагональ.* Якщо всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, а недіагональні дорівнюють нулю, то таку матрицю називають *одиничною* (порядку n).

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{n\times n},\ \text{де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

5. Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, а діагональні — будь-які, то таку квадратну матрицю називають *діагональною.*

6. Якщо вище головної діагоналі всі елементи квадратної матриці дорівнють нулю, то таку матрицю називають *нижньо-трикутною.*

7. Якщо ж у матриці дорівнюють нулю всі елементи нижче головної діагоналі, то таку матрицю називають *верхньо трикутною.*

8. Якщо рядки матриці $A_{n\times m}$ записати по стовпчиках, то одержим нову матрицю $B_{m\times n}$, яку називають *транспонованою* до A: $B = A^\top,\ b_{ij} = a_{ji}$.

9. Квадратна матриця називається *симетричною*, якщо $A = A^\top$, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратна матриця називається *кососиметричною*, якщо $A = -A^\top$, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$.

Приклади.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

E_2 – одинична матриця, $O_{3\times 2}$ – нульова, D – діагональна, B – верхньо-трикутна, C – нижньо-трикутна, S – симетрична, а матриця A – кососиметрична.

1.2 Дії з матрицями

Позначимо $\mathbb{R}_{n\times m}$ – множину усіх матриць із n рядків та m стовпчиків, елементи яких належать $\mathbb{R}$.

1. Будь-яку матрицю A можна помножити на елемент $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = B, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Після множення матриці на число ми одержуємо матрицю такого ж самого розміру. При множенні матриці на число всі її елементи множаться на це число. Мають місце властивості:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall A, B \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

2. Сума двох матриць визначена тільки у випадку, коли розміри доданків збігаються:

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Сума двох матриць має той самий розмір, що і доданки:

- $\forall A, B \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad A + B = B + A;$
- $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (A + B) + C = A + (B + C);$
- $\exists O \in \mathbb{R}_{n\times m} \ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad A + O = O + A = A.$

3. Якщо кількість стовпчиків у матриці A (тобто довжина рядка) дорівнює кількості рядків у матриці B (тобто довжині стовпчика), тоді визначений добуток AB. Якщо $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, то $AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Приклад. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

добутком AB буде матриця

$$AB = \begin{pmatrix} -2-6-3 & 2+0+15 \\ +2+0-4 & -2+0+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 17 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}.$$

Добутком BA цих матриць буде

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & -4+0 & -6+8 \\ -3+0 & -6+0 & -9+0 \\ -1-5 & -2+0 & -3+20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -3 & -6 & -9 \\ -6 & -2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Властивості добутку матриць:

- У загальному випадку $AB \neq BA$, навіть якщо обидві матриці квадратні одного розміру (n>1);
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p},\ C \in \mathbb{R}_{p\times r} \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
- $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{n\times n} \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad A\cdot E_n = A, \quad E_m \cdot A = A.$

4. Будь-яку матрицю можна транспонувати:

$$A \mapsto A^\top = B, \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (A^\top)^\top = A$;
- $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p} \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$

1.3 Обернена матриця

Для деяких квадратних матриць існує обернена матриця.

Визначення. Матриця B називається *оберненою* до матриці A, якщо виконуються дві рівності $AB = BA = E$, де E – одинична матриця. Обернена до A матриця позначається через A^{-1}.

Матриця, яка має обернену, називається *оборотною.*

Для прикладу візьмемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -12 & -7 \end{pmatrix},$$

Перевірте самостійно, що $AB = BA = E$, тобто матриця B обернена до A, а матриця A є оберненою до B.

Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

Добуток оборотних матриць є оборотною матрицею.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.4 Знаходження оберненої матриці методом Гауса

Існує один алгоритм, так званий метод Гауса, який за скінченну кількість кроків дозволяє знайти обернену матрицю, якщо вона існує. А якщо обернена матриця не існує, то метод Гауса зупиняється вказуючи на це. Нижче дамо відповідні означення й обґрунтування.

Елементарними перетвореннями рядків матриці A називають:

- множення рядка на ненульове число;
- переставляння двох рядків;
- додавання до одного рядка іншого рядка, помноженого на будь-яке число.

Застосування кожного з цих елементарних перетворень квадратної матриці еквівалентне множенню матриці зліва на матрицю, яка одержується із одиничної застосуванням цього перетворення.

Приклади. Припустимо, що розглядається матриця $A_{3\times 3}$. Легко перевірити, що множенню другого рядка на 7 відповідає множення $U \cdot A$, переставлянню другого та третього рядків відповідає $V \cdot A$, а додаванню третього рядка, помноженого на x, до другого відповідає множення $W \cdot A$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За допомогою елементарних перетворень оборотну матрицю A можна привести до одиничної, це буде еквівалентне множенню її зліва на A^{-1}. Якщо ці самі перетворення робити з одиничною матрицею, що має розмір матриці A, то ми отримаємо $A^{-1} \cdot E = A^{-1}$. В цьому і полягає метод Гауса. Розберемо його на прикладі.

Приклад. Дана матриця $A_{3\times 3}$. Знайти A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Припишемо справа від матриці A одиничну матрицю такого самого розміру. Елементарні перетворення будемо проводити з рядками великої матриці розміру 3×6.

1. Спочатку треба отримати в лівому верхньому куточку одиницю. Якщо $a_{11} \neq 0$, можна поділити перший рядок на a_{11}. Якщо $a_{11} = 0$, але у першому стовпчику є ненульове число у k-му рядку, тоді міняємо місцями 1-й та k-й рядки і ділимо новий перший рядок на відповідне число. Якщо ж у першому стовпчику всі елементи нульові, тоді матриця A не має оберненої.

2. Далі отримуємо під одиничкою у першому стовпчику нулі, тобто додаємо до i-го рядка новий перший рядок, помножений на $-a_{i1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -16 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

3. Далі так само отримуємо одиницю на місці a_{22}, та під одиничкою усі нулі. І так діємо, поки не отримаємо верхньо-трикутну матрицю з одиничками на головній діагоналі.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

4. Тепер діємо знизу вгору. За допомогою останнього рядка отримуємо в останньому стовпчику першої матриці нулі. Далі за допомогою передостаннього рядка знову отримуємо в передостанньому стовпчику над одиничкою всі нулі і так далі, поки не отримаємо одиничну матрицю.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17 & 23 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 23 & -7 \\ 12 & -16 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вправа. Дана матриця $A_{3\times3}$. Знайдіть A^{-1} методом Гауса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Відповідь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1.5 Рішення систем лінійних рівнянь методом Гауса

Розглянемо систему із m рівнянь з n невідомими:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Цю систему можна записати у матричному вигляді: $A\bar{x} = \bar{b}$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A – матриця системи, $\bar{x}$ – стовпчик невідомих, $\bar{b}$ – стовпчик правих частин. Метод Гауса рішення системи лінійних рівнянь полягає в тому, що ми записуємо систему у вигляді $(A|\bar{b})$ і, використовуючи три елементарних перетворення, знаходимо рішення, якщо воно існує. Докладно теорія систем лінійних рівнянь вивчається в курсі вищої алгебри.

Приклад. Пряма у просторі задана як перетин двох площин: $x+2y+3z-7 = 0$, $2x + 4y - z = 0$. Знайти параметричне рівняння цієї прямої.

Маємо систему з двох рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 7 \\ 2x + 4y - z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Записуємо її у матричному вигляді $(A|\bar{b})$, позначимо цю матрицю B – це *розширена* матриця системи рівнянь.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

До другого рядка додаємо перший, помножений на -2. Ділимо отриманий другій рядок на -7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Ми отримали так званий *усічено-трикутний* вигляд матриці B.

Кількість ненульових рядків усічено-трикутної матриці називається *рангом* матриці (позначається rg).

- Якщо $\mathrm{rg}\ A < \mathrm{rg}\ B$, тобто у матриці A є нульовий рядок, а у матриці B він ненульовий, тоді система не має рішень.
- Якщо $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B = n$, де n – кількість змінних, тоді система має єдине рішення.
- Якщо $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B = r < n$, тоді рішення існує, воно залежить від $n - r$ вільних параметрів.

У нашому випадку $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B = 2 < 3$ рішення залежить від одного вільного параметра. Вертикальна рисочка символізує знак рівності. Ми повинні зліва отримати одиничну матрицю, для цього ми перенесемо другий стовпчик із протилежним знаком за вертикальну рисочку (переносимо другу змінну за знак рівності з протилежним знаком). Щоб потім не помилитися і не забути, де яка змінна, підпишімо їх зверху.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & z & y & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & z & y & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

y – вільний параметр. Нехай $y = t$, випишімо рішення у вигляді:

$$\begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= t \\ z &= 2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

Ми отримали ще векторне рівняння прямої $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t$, де $\bar{r}_0$ – радіус-вектор точки на прямій, $\bar{a}$ – напрямний вектор прямої.

1.6 Визначники (детермінанти)

Для квадратних матриць певним чином визначається *детермінант* (або *визначник*). Це число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці A за певним правилом, позначається $\det A$, або $|A|$.

Визначник матриці $A_{1\times 1} = (a)$, є тим числом, з якого складається матриця:

$$\det(a) = a. \tag{1}$$

Отже, якщо матриця має вигляд $A = (7)$, то $\det(7) = 7$. Відповідно, $\det(0) = 0$, $\det(-3) = -3,\ \det(2x - 6) = 2x - 6$.

Визначник матриці $A_{2\times 2}$ підраховується за формулою

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{2}$$

Приклади. Згідно з цією формулою

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Існує декілька рівносильних визначень детермінанта. Наведемо визначення детермінанта розкладанням за елементами першого рядка, яке вимагає лише знання повної математичної індукції. Для цього нам потрібні ще два визначення.

Доповнювальним мінором до елемента a_{ij} матриці $A_{n\times n}$ є визначник матриці, отриманої при викреслюванні i-го рядка та j-го стовпчика, тобто визначник $(n-1)$-го порядку, позначається він $\bar{M}_{ij}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\bar{M}_{ij}$ називають *алгебричним доповненням елемента* a_{ij}.

Визначення детермінанта. Визначник матриці порядку 3 і вище є сумою добутків елементів першого стовпчика на їх алгебричні доповнення, тобто

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\bar{M}_{1i}. \tag{3}$$

Визначники матриц 1-го і 2-го порядків визначаються формулами (1), (2).

За цим визначенням для детермінантів третього порядку маємо формулу розкладання за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Квадратна матриця є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона невироджена. $\exists\ A^{-1} \ \Leftrightarrow\ \det A \neq 0$.

Визначник матриці A розміру $n \times n$ можна обчислити, розкладаючи за елементами будь-якого рядка. Остання словосполука означає, що коли вибраний k-й рядок, $1 \le k \le n$, то визначник матриці A можна обчислювати за формулою

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}\bar{M}_{ki}.$$

1.7 Лінійний простір

Непорожня множина V називається *дійсним лінійним (або векторним) простором* (а її елементи *векторами*), якщо на ній задана операція додавання елементів (кожним $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ставиться у відповідність вектор $\vec{a} + \vec{b} \in V$), а також операція множення елементів із V на дійсні числа (кожному вектору $\vec{a} \in V$ і кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ ставиться у відповідність вектор $\lambda\vec{a} \in V$), та якщо виконуються наступні аксіоми:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність);
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативність);
3) існує вектор $\vec{0} \in V$ такий, що для кожного $\vec{a} \in V$ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
4) для кожного $\vec{a} \in V$ існує $-\vec{a} \in V$ такий, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
7) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

для будь-яких дійсних λ, μ та будь-яких $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V$.

Приклади. (Перевірте самостійно).

1. Множина дійсних матриць $\mathbb{R}_{n\times m}$ є дійсним лінійним простором.

2. Геометричні вектори, відкладені від однієї точки, утворюють лінійний простір.

3. Стовпчики $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, що складаються з чисел, можна, як і матриці розміру $n \times 1$, додавати, множити на число λ:

$$\bar{a}' + \bar{a}'' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1'' \\ a_2'' \\ \vdots \\ a_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' + a_1'' \\ a_2' + a_2'' \\ \vdots \\ a_n' + a_n'' \end{pmatrix},\ \lambda\bar{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Стовпчики утворюють лінійний простір.

4. Множина поліномів $P_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k,\ a_k \neq 0,\ 0 \leq k \leq n,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n, є дійсними лінійним простором.

5. Функції від дійсної змінної неперервні на відрізку $[a,\ b]$ утворюють дійсний лінійний простір $C[a,\ b]$.

6. Функції від дійсної змінної інтегровні на відрізку $[a,\ b]$ утворюють дійсний лінійний простір $L[a,\ b]$.

1.8 Функціонали

Відображення $f : V \to \mathbb{R}$, яке ставить у відповідність кожному вектору $\bar{a} \in V$ число $f(\bar{a})$ із $\mathbb{R}$ називається *функціоналом.*

Функціонал $f(\bar{a})$ називається *адитивним*, якщо для будь-яких векторів $\bar{a},\ \bar{b}$

$$f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b}).$$

Функціонал називається *однорідним*, якщо для будь-якого вектора $\bar{a}$ і для будь-якого числа λ можна написати

$$f(\lambda\bar{a}) = \lambda f(\bar{a}).$$

Якщо функціонал і адитивний і однорідний, то його називають *лінійним*. Можна сказати, що фунціонал лінійний, якщо для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та чисел λ, μ виконується рівність

$$f(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) = \lambda f(\bar{a}) + \mu f(\bar{b}).$$

Функціонал від n змінних — це відображення $f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, яке ставить n векторам $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ у відповідність число $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$.

Якщо цей функціонал є лінійним по кожній зі своїх змінних, то він називається *полілінійним.*

Якщо поміняти місцями будь-які дві змінні і значення функціоналу не зміниться, то функціонал називається *симетричним.*

Якщо поміняти місцями будь-які дві змінні і значення функціоналу поміняє знак на протилежний, то функціонал називається *кососиметричним.*

Бувають функціонали симетричні по одному набору змінних, та кососиметричні по іншому набору змінних.

Приклади. 1. Відображення $\mathrm{tr} : \mathbb{R}_{n\times n} \to \mathbb{R}$, яке ставить у відповідність квадратній матриці суму елементів головної діагоналі, називається *слідом матриці.* Перевірте, що це відображення є лінійним функціоналом.

2. Відображення $f : P_n[x] \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k) = a_k$ $(a_k \neq 0)$, є однорідним, але не адитивним функціоналом.

3. Відображення, яке ставить у відповідність кожному геометричному вектору його довжину, є однорідним, але не адитивним функціоналом.

1.9 Інше визначення детермінанта. Властивості

Квадратну матрицю $A_{n\times n}$ можна розглядати як упорядкований набір з n стовпчиків довжини n:

$$A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n), \text{ де } \bar{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Тоді детермінант можна розглядати як функціонал n змінних (у якості змінних виступають стовпчики). Одним із еквівалентних визначень детермінанта є:

Детермінантом квадратної матриці називається кососиметричний полілінійний функціонал стовпчиків $\det : (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \mapsto \mathbb{R}$.

Випишімо властивості детермінанта, які випливають з цього визначення:

- Якщо поміняти будь-які два стовпчики місцями, детермінант поміняє знак на протилежний (кососиметричність).
- Полілінійність означає лінійність по кожному з аргументів. Наприклад, випишімо для першого аргументу ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\det(\lambda \bar{x}_1' + \mu \bar{x}_1'', \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \lambda \det(\bar{x}_1', \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \mu \det(\bar{x}_1'', \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

- Якщо у матриці A є нульовий стовпчик, то $\det A = 0$.
- Якщо у матриці A два стовпчики пропорційні, або один є лінійною комбінацією інших, то $\det A = 0$.
- Визначник не зміниться, якщо до будь-якого його стовпчика додати інший, помножений на будь-яке число.
- Визначник діагональної, верхньо-трикутної та нижньо-трикутної матриць дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Сформулюємо без доведення ще деякі властивості детермінанта:

$$\det A^\top = \det A, \quad \det(AB) = \det A \cdot \det B, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Оскільки визначник не залежить від операції транспонування, то всі властивості, які сформульовані для стовпчиків, виконуються також і для рядків, та навпаки. Тобто визначник можна розкладати і за елементами k-го стовпчика:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \bar{M}_{ik}.$$

Метод Гауса обчислення визначника полягає в тому, щоб за допомогою операцій переставляння рядків (знак визначника змінюється), додавання до одного рядка іншого, помноженого на число та винесення спільного множника елементів рядка за знак det, привести матрицю, від якої підраховується визначник, до верхньо-трикутної, та обчислити добуток елементів головної діагоналі.

Приклад. Обчислити визначник методом Гауса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -16 & -17 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & -16 & -17 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & -16 & -17 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -31 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$$

Вправа. Обчислити визначник методом Гауса: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Відповідь: -24.

1.10 Лінійна залежність та незалежність векторів

Нехай V – лінійний простір, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$. *Лінійною комбінацією* векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ називається вираз

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Лінійна комбінація називається *тривіальною*, якщо $\lambda_i = 0$ для кожного $i = \overline{1,n}$, в протилежному випадку, якщо існує i таке, що $\lambda_i \neq 0$, тоді лінійна комбінація називається *нетривіальною*.

Система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює $\vec{0}$. У протилежному випадку, ця система називається *лінійно незалежною*, тобто тільки тривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює $\vec{0}$.

Приклад. Встановити, чи є система векторів $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ лінійно залежною. Якщо це можливо, представити вектор $\vec{c}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1. $\vec{a} = \{1,\ 2,\ -1\}$, $\vec{b} = \{2,\ 0,\ 1\}$, $\vec{c} = \{4,\ 4,\ -1\}$.

Утворюємо лінійну комбінацію цих векторів, прирівнюємо її до $\vec{0}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Записуємо її у матричному вигляді (нульовий стовпчик правих частин не пишеться, тому що лінійна комбінація нулів завжди нуль).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2 < 3$, тобто існує нетривіальне (ненульове) рішення, яке залежіть від одного вільного параметру, отже система векторів лінійно залежна.

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \lambda_1 &= -2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= -\lambda_3 \end{cases}$$

Ми шукали рішення векторного рівняння $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$. Нам потрібно знайти вектор $\vec{c}$, λ_3 – вільний параметр, візьмемо $\lambda_3 = -1$, тоді $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$ і

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

2. $\vec{a} = \{1,\ 2,\ -2\},\ \vec{b} = \{3,\ 6,\ -6\},\ \vec{c} = \{2,\ 1,\ -4\}$.
Утворюємо лінійну комбінацію цих векторів, прирівнюємо її до $\vec{0}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 - 6\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Записуємо її у матричному вигляді.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\ A = 2 < 3$, тобто існує нетривіальне рішення, яке залежіть від одного вільного параметра, отже система векторів лінійно залежна.

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \lambda_1 &= -3\lambda_2 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

Ми отримали нетривіальну лінійну комбінацію $-3\lambda_2\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Система лінійно залежна, але вектор $\vec{c}$ не можливо представити у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a},\ \vec{b}$. В нашому випадку $\vec{b} = 3\vec{a}$.

Твердження. Система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів системи лінійно виражається через інші.

Розглянемо загальний випадок. Нехай є система векторів

$$\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\},\ \vec{a}_i = \{a_{1i},\ a_{2i}, \ldots, a_{ni}\}\ (i = \overline{1, k}).$$

Потрібно перевірити, чи є вона лінійно залежною, чи лінійно незалежною. Для цього ми утворюємо лінійну комбінацію цих векторів, та прирівнюємо її до $\vec{0}$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримуємо систему рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_k a_{1k} & = & 0 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_k a_{2k} & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_k a_{nk} & = & 0 \end{array} \right.$$

Матриця A цієї системи має наступний вигляд (її стовпчики складаються з координат векторів $\vec{a}_i$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Система, у якої стовпчик правих частин нульовий називається *однорідною.* (Можна вважати, що розширена матриця системи B співпадає з матрицею системи A.) Така система завжди має рішення – нульове, воно називається *тривіальним.*

Застосуємо метод Гауса рішення систем лінійних рівнянь (дивись п. 1.5) Очевидно, що $\text{rg } A \leq n$.

- Якщо $k > n$, тоді система рівнянь має нетривіальне рішення і система векторів лінійно залежна.
- Якщо $k = n$, тоді у випадку $\text{rg } A = n$ (тобто $\det A \neq 0$) система рівнянь має єдине (тривіальне) рішення і система векторів лінійно незалежна, а у випадку $\text{rg } A < n$ (тобто $\det A = 0$) система рівнянь має нетривіальне рішення і система векторів лінійно залежна.
- Якщо $k < n$, тоді у випадку $\text{rg } A = k$ система рівнянь має єдине рішення (тривіальне) і система векторів лінійно незалежна, а у випадку $\text{rg } A < k$ система рівнянь має нетривіальне рішення і система векторів лінійно залежна.

Вправа. Визначити лінійну залежність або незалежність системи векторів $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$, де $\vec{a} = \{2,\ 3,\ -1\}$, $\vec{b} = \{1,\ -1,\ 1\}$, $\vec{c} = \{2,\ 4,\ 3\}$.

Відповідь: система лінійно незалежна.

1.11 Базис лінійного простору

Нехай V – лінійний простір. Система векторів $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} \in V$ називається *базисом лінійного простору* V, якщо:

- система $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ лінійно незалежна;
- для кожного $\vec{b} \in V$ система векторів $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \vec{b}\}$ лінійно залежна.

Кількість елементів базису називається *вимірністю лінійного простору* та позначається через $\dim V$.

З другої умови випливає, що будь-який вектор $\vec{b} \in V$ може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, тобто

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n.$$

Кожному вектору $\vec{b}$ відповідає єдиний набір коефіцієнтів $\{b_1, \ldots, b_n\}$, котрий називається *координатами вектора* $\vec{b}$ у базисі $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

- $\vec{b} + \vec{c} = \{b_1 + c_1,\ b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n\}$;
- $\lambda\vec{b} = \{\lambda b_1,\ \lambda b_2, \ldots, \lambda b_n\}$.

Зауважимо, що базисні вектори в цьому ж базисі завжди мають такі координати:

$$\begin{array}{c}
\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{e}_n = \{1,\ 0, \ldots, 0\}, \\
\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{e}_n = \{0,\ 1, \ldots, 0\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}_n = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + 1 \cdot \vec{e}_n = \{0,\ 0, \ldots, 1\}.
\end{array}$$

Приклади. 1. Розглянемо лінійний простір, який утворюють геометричні вектори площини відкладені від однієї точки. Будь-які два вектори, що не належать одній прямій, утворюють базис цього простору. Наприклад, якщо введена прямокутна декартова система координат, то базисом площини можуть бути вектори $\vec{e}_1 = \{1,\ 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0,\ 1\}$, або $\vec{a}_1 = \{1,\ 2\}$, $\vec{a}_2 = \{-1,\ 1\}$, або інші непаралельні два вектори.

2. Базисом лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times2}$ є

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вимірність цього простору $\dim \mathbb{R}_{2\times2} = 4$. Довільна матриця A має в цьому базисі такі координати $A = \{a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}\}$.

3. Вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ задані своїми координатами в деякому базисі. Знайти координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$.

$$\vec{a} = \{1,\ -1,\ 2\},\ \vec{b} = \{2,\ 1,\ 2\},\ \vec{c} = \{-1,\ 0,\ 1\},\ \vec{d} = \{1,\ 0,\ 6\}$$

Утворюємо лінійну комбінацію векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, та прирівнюємо її до $\vec{d}$:

$$d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо систему рівнянь, розв'язуємо її методом Гауса.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} d_1 & = & 1 \\ d_2 & = & 1 \\ d_3 & = & 2 \end{cases}$$

Отже, вектор $\vec{d}$ в базисі $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ має такі координати $\vec{d} = \{1,\ 1,\ 2\}$, тобто $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$.

Вправа. Знайти базис та визначити вимірність лінійного простору поліномів $P_n[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k,\ a_k \neq 0,\ 0 \leq k \leq n,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n.

Відповідь: вимірність цього простору дорівнює $n+1$.

1.12 Перетворення базисів та координат

Розглянемо спочатку перетворення базисів на площині. Нехай $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – старий базис, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – новий базис. Розкладемо вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ по базису $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = c_{11}\vec{u}_1 + c_{21}\vec{u}_2, \\ \vec{v}_2 = c_{12}\vec{u}_1 + c_{22}\vec{u}_2. \end{cases} \tag{4}$$

Тобто нові базисні вектори мають у старому базисі координати:

$$\vec{v}_1 = \{c_{11},\ c_{21}\},\ \vec{v}_2 = \{c_{12},\ c_{22}\}.$$

Нехай вектор $\vec{a}$ має в старому базисі координати $\vec{a} = \{x_u,\ y_u\}$, а в новому $\vec{a} = \{x_v,\ y_v\}$. Тобто $\vec{a} = x_u\vec{u}_1 + y_u\vec{u}_2, \quad \vec{a} = x_v\vec{v}_1 + y_v\vec{v}_2$.

Знайдемо залежність між новими та старими координатами. Скориставшись розкладанням (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_v\vec{v}_1 + y_v\vec{v}_2 = x_v(c_{11}\vec{u}_1 + c_{21}\vec{u}_2) + y_v(c_{12}\vec{u}_1 + c_{22}\vec{u}_2) = \\ &= (c_{11}x_v + c_{12}y_v)\vec{u}_1 + (c_{21}x_v + c_{22}y_v)\vec{u}_2. \end{aligned}$$

Оскільки вектор розкладається по базису єдиним чином, то

$$\begin{cases} x_u &= c_{11}x_v + c_{12}y_v, \\ y_u &= c_{21}x_v + c_{22}y_v. \end{cases}$$

Отримані формули називаються *формулами перетворення координат векторів* при перетворенні базисів (4). Запишімо ці формули у матричній формі

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \; -$$

матриця переходу від старого базису до нового, її стовпчики – це координати нових базисних векторів в старому базисі.

Формула перетворення координат векторів виглядає так само для будь-якої вимірності простору, тобто якщо $\bar{a}_u$ – стовпчик старих координат, $\bar{a}_v$ – стовпчик нових координат вектора $\vec{a}$, $C_{n\times n}$ – матриця переходу від старого базису $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ до нового $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ (її стовпчиками являються координати нових базисних векторів в старому базисі), тоді

$$\bar{a}_u = C\bar{a}_v.$$

Якщо у тривимірному просторі нові базисні вектори мають в старому базисі координати $\vec{v}_i = \{c_{1i},\ c_{2i},\ c_{3i}\}$ $(i = 1, 2, 3)$, тоді:

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Приклад. Відомі координати векторів в декартовій системі координат:
$\vec{u}_1 = \{1,\ 1,\ -1\},\ \vec{u}_2 = \{1,\ 1,\ 0\},\ \vec{u}_3 = \{1,\ -1,\ -1\},$
$\vec{v}_1 = \{0,\ 2,\ -1\},\ \vec{v}_2 = \{-1,\ 1,\ 0\},\ \vec{v}_3 = \{3,\ 1,\ 0\}.$
Знайти матрицю переходу від старого базису $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ до нового $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$. Знайти старі координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі його нові координати $\vec{a}_v = \{2,\ 1,\ -1\}$.

Для того, щоб знайти матрицю переходу, нам потрібно знайти координати нових базисних векторів в старому базисі. Ми утворюємо лінійну комбінацію векторів $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ та прирівнюємо її до векторів $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ по черзі:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримуємо три системи лінійних рівнянь з однаковою матрицею системи та різними правими частинами. Будемо шукати рішення усіх трьох систем одночасно.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Отримали матрицю переходу від старого базису до нового, оскільки її стовпчики – це координати нових базисних векторів в старому базисі:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{a}_u = C\bar{a}_v \Rightarrow \bar{a}_u = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо себе – знайдемо координати вектора $\vec{a}$ в декартовій системі координат: $\vec{a} = 6\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 - 4\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \{-4,\ 4,\ -1\}$.

2 Алгебра в геометрії

2.1 Афінний простір

Нехай A – множина точок, V – лінійний простір, $\dim V = n$.

Пара $\mathcal{A} = (A, V)$ називається *афінним простором*, якщо існує (задано) відображення $\varphi : A \times A \to V$, що ставить у відповідність точкам $M_1, M_2 \in A$ єдиний вектор в V, який позначається $\overrightarrow{M_1M_2}$, причому:

1) для будь-якої точки $M_1 \in A$ і будь-якого вектора $\vec{a} \in V$ існує єдина точка $M_2 \in A$ така, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a}$,

2) для будь-яких $M_1, M_2, M_3 \in A$ виконується рівність:

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_3} \text{ (правило трикутника).}$$

Вимірність афінного простору $\mathcal{A}$ визначається вимірністю векторного простору V.

Приклади. 1. *Площина як афінний простір.* Нехай A – площина, V – лінійний векторний двовимірний простір. Задамо відображення $\varphi : A\times A \to V$, ставлячи у відповідність парі точок $(M_1,\ M_2)$ з координатами $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ такий вектор $\vec{a}$ із V, якій має такі самі координати, як і направлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$, тобто $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$. Тоді пара

$$\mathcal{A} = (A, V)$$

утворює афінний простір, який називається *афінною площиною.*

2. $\mathbb{R}^n$ *як афінний простір.* Розглянемо множину точок $A = \mathbb{R}^n_{\textit{точ}} = \{M(x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ і лінійний простір $V = \mathbb{R}^n_{\textit{вект}} = \{\vec{a} = \{x_1, \dots, x_n\},\ x_i \in \mathbb{R}\}$. Задамо відображення $\varphi : \mathbb{R}^n_{\textit{точ}} \times \mathbb{R}^n_{\textit{точ}} \to \mathbb{R}^n$, яке діє за правилом

$$\varphi(M_1, M_2) = \{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(2)} - x_n^{(1)}\},$$

де $M_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $M_2 = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$. Тоді пара

$$\mathbb{R}^n_{\textit{аф}} = (\mathbb{R}^n_{\textit{точ}}, \mathbb{R}^n_{\textit{вект}})$$

є афінним простором.

2.2 Афінна система координат

Нехай $\mathcal{A}^n = (A, V)$ афінний простір. Зафіксуємо точку $O \in A$ і довільний базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$. Нехай $M \in A$ – довільна точка. Тоді вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$ називається *радіус-вектором* точки M. Розкладемо $\overrightarrow{OM}$ по базису:

$$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Набір чисел $(x_1, \dots, x_n)$ називається *афінними координатами* точки M, а система координат $\{O,\ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ називається *афінною системою координат.*

Якщо $A,\ B$ дві довільні точки афінного простору $\mathcal{A}^n$ з афінними координатами $(a_1,\ a_2, \dots, a_n)$ та $(b_1,\ b_2, \dots, b_n)$ відповідно, тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1,\ b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n\}.$$

Дійсно, $\vec{r}_A = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n$, $\quad \vec{r}_B = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \dots + b_n\vec{e}_n$. За правилом трикутника

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \dots + b_n\vec{e}_n - a_1\vec{e}_1 - a_2\vec{e}_2 - \dots - a_n\vec{e}_n = \\ &= (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + \dots + (b_n - a_n)\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Приклад. В трапеції $ABCD$ основи BC і AD відносяться $1 : 4$. Приймаючи за початок координат точку A, а за базисні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, знайти в цій системі координат координати вершин трапеції та точки O перетину діагоналей.

Оскільки точка A – початок координат, то її координати
$\vec{r}_A = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = \{0,\ 0\}$, тобто $A(0,\ 0)$.
$\vec{r}_B = \overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 = \{1,\ 0\}$, тобто $B(1,\ 0)$.
$\vec{r}_D = \overrightarrow{AD} = \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 = \{0,\ 1\}$, тобто $D(0,\ 1)$.
$\vec{r}_C = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = 1 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \cdot \vec{e}_2 = \{1,\ \frac{1}{4}\}$, тобто $C(1,\ \frac{1}{4})$.
Оскільки $\triangle AOD \sim \triangle COB$ з коефіцієнтом подібності 4, то $\overrightarrow{AO} = 4\overrightarrow{OC}$.
$\vec{r}_O = \overrightarrow{AO} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}\{1,\ \frac{1}{4}\} = \{\frac{4}{5},\ \frac{1}{5}\}$, тобто $O(\frac{4}{5},\ \frac{1}{5})$.

2.3 Орієнтація системи векторів

Нехай $C_{n\times n}$ – матриця переходу від базису $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ до системи векторів $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, де $\vec{v}_i = \{c_{1i},\ c_{2i}, \ldots, c_{ni}\}$ $(i = \overline{1,n})$ (її стовпчики – це стовпчики координат векторів $\vec{v}_i$):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді (дивись п. 1.10):

- Якщо $\det C = 0$, тоді вектори $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ лінійно залежні.
- Якщо $\det C \neq 0$, тоді вектори $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ лінійно незалежні і утворюють новий базис.

Тобто матриця переходу від одного базису до іншого має властивість

$$\det C \neq 0.$$

- Якщо $\det C > 0$, то базиси $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ та $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ називаються *орієнтованими однаково.*
- Якщо $\det C < 0$, то базиси $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ та $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ називаються *орієнтованими протилежно.*

Зафіксуємо деякий базис простору, назвемо його орієнтованим додатно. Тоді всі базиси, до яких перехід від фіксованого здійснюється за допомогою матриці переходу, що має додатний детермінант, називаються *орієнтованими додатно*; а базиси, до яких перехід здійснюється за допомогою матриці переходу з від'ємним детермінантом, називаються *орієнтованими від'ємно.*

Базиси декартової системи координат на площині та у просторі вважаються орієнтованими додатно. Тобто для того, щоб визначити орієнтацію лінійно незалежної системи векторів в декартовій системі координат, потрібно скласти матрицю C, записавши в стовпчики координати цих векторів, обчислити детермінант цієї матриці, якщо $\det C > 0$ – система орієнтована додатно, якщо $\det C < 0$ – від'ємно.

Приклади. Визначити орієнтацію системи векторів.

1. $\vec{a} = \{1,\ 2,\ -1\},\ \vec{b} = \{2,\ 4,\ 1\},\ \vec{c} = \{4,\ 2,\ -8\}$.
Складаємо матрицю з координат векторів та обчислюємо її визначник, користуючись властивостями визначника (див. п. 1.9):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot (-6) = 18 > 0$$

Система векторів орієнтована додатно.

2. $\vec{a} = \{1,\ 2\},\ \vec{b} = \{4,\ -1\}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 < 0$$

Система векторів орієнтована від'ємно.
На малюнку орієнтацію векторів можна визначити наступним чином:

- два вектори $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ на площині

  – *орієнтовані додатно*, якщо найкоротший оберт від першого вектора до другого здійснюється проти годинникової стрілки;

  – *орієнтовані від'ємно*, якщо найкоротший оберт від першого вектора до другого здійснюється за годинниковою стрілкою;

- три вектори $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ у просторі

  – *орієнтовані додатно*, якщо із кінця третього вектора найкоротший оберт від першого вектора до другого видно проти годинникової стрілки;

  – *орієнтовані від'ємно*, якщо із кінця третього вектора найкоротший оберт від першого вектора до другого видно за годинниковою стрілкою.

2.4 Перетворення афінної системи координат

Розглянемо спочатку перетворення афінної системи координат на площині. Нехай $\{O,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ – стара система координат, $\{O',\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\}$ – нова система координат. Вони звязані наступним чином:
$\vec{r}_{O'u} = \overrightarrow{OO'}_u = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2,\ \vec{v}_1 = c_{11}\vec{u}_1 + c_{21}\vec{u}_2,\ \vec{v}_2 = c_{12}\vec{u}_1 + c_{22}\vec{u}_2$.

Нехай точка M має в старій системі координати $(x_u,\ y_u)$, тобто $\vec{r}_{Mu} = \overrightarrow{OM}_u = x_u\vec{u}_1 + y_u\vec{u}_2$, а в новій системі координати $(x'_v,\ y'_v)$, тобто $\vec{r}_{Mv} = \overrightarrow{O'M}_v = x'_v\vec{v}_1 + y'_v\vec{v}_2$. За правилом трикутника $\vec{r}_{Mu} = \overrightarrow{OM}_u = \overrightarrow{OO'}_u + \overrightarrow{O'M}_u$. Якщо

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} -$$

матриця переходу від старого базису до нового (її стовпчики – це координати нових базисних векторів в старому базисі). Тоді за правилом перетворення координат вектора при заміні базису (див. п. 1.12) стовпчики координат вектора $\overrightarrow{O'M}$ в двох базисах зв'язані формулою

$$\overline{O'M}_u = C \cdot \overline{O'M}_v.$$

Отже $\bar{r}_{Mu} = \overline{OM}_u = \overline{OO}'_u + \overline{O'M}_u = C \cdot \overline{O'M}_v + \overline{OO}'_u$.

Тобто формула перетворення координат точки при заміні афінної системи координат виглядає так:

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Вона виглядає так само для афінного простору будь-якої вимірності. Випишімо цю формулу для тривимірного простору.

Нехай $\{O,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ – стара система координат, $\{O',\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ – нова система координат, які зв'язані наступним чином:

$O'(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{v}_i = \{c_{1i},\ c_{2i},\ c_{3i}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ – координати точки O' та векторів $\vec{v}_i$ в старій системі координат.

Точка M має в старій системі координати $(x_u,\ y_u,\ z_u)$, а в новій координати $(x'_v,\ y'_v,\ z'_v)$, тоді

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. $ABCD$ – паралелограм, точка O – точка перетину діагоналей паралелограму, точка E ділить сторону DC у співвідношенні $1 : 3$. Задано дві афінні системи координат $\{A,\ \vec{u}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{AD}\}$, $\{O,\ \vec{v}_1 = \overrightarrow{OC},\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{OE}\}$. Знайти координати довільної точки площини у першій системі, знаючи її координати у другій, та навпаки.

Знайдемо координати точки O та векторів $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ в першій системі координат. Оскільки точка O – точка перетину діагоналей, то $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$. Тобто точка O має координати $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ (координати радіус-вектора $\vec{r}_O = \overrightarrow{AO}$). Координати першого базисного вектора $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OC} = \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\}$.

Оскільки E ділить сторону DC у співвідношенні $1 : 3$, то $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\vec{u}_1$; координати другого базисного вектора $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \frac{3}{4}\vec{u}_1 = -\frac{1}{4}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 = \{-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\}$.

Записуємо координати векторів $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ по стовпчиках, утворюємо матрицю переходу від першого базису до другого:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det C = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} > 0$, тобто ці дві системи координат орієнтовані однаково.

Якщо довільна точка M площини має в першій системі координати $(x,\ y)$, а в новій $(x',\ y')$, тоді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

У матричній формі ця рівність виглядає так: $\bar{x} = C\bar{x}' + \bar{a}$. Знайдемо стовпчик нових координат $\bar{x}'$ точки M:

$$C\bar{x}' = \bar{x} - \bar{a}, \quad \bar{x}' = C^{-1}\bar{x} + C^{-1}(-\bar{a}).$$

Знайдемо C^{-1} методом Гауса.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right).$$

Отже

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad C^{-1}(-a) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо записати формулу для координат точки в другій системі:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси ми можемо зробити висновок, що в другій системи координат у точки A координати $(-1,\ 0)$, а вектори $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ мають координати $\vec{u}_1 = \{\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\}$, $\vec{u}_2 = \{\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\}$.

Вправа. У трикутнику ABC точка D належить стороні AC, а точка E – відрізку BD, причому $AD : AC = 1 : 3,\ BE : ED = 2 : 3$. Знайти координати точки площини $(x,\ y)$ в системі координат $\{A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\}$, якщо відомі її координати $(x',\ y')$ в системі координат $\{C,\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CE}\}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ -3 & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2.5 Скалярний добуток

Нехай V – лінійний простір, асоційований з $\mathcal{A}^n$. *Скалярним добутком* в V називається симетричний, додатно визначений білінійний функціонал. Розшифруємо це визначення.

Функціонал – відображення $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, тобто двом векторам $\vec{a},\ \vec{b}$ ставиться у відповідність число $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle -$ симетричність;
- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причому $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ – додатна визначеність;
- $\left.\begin{array}{lll} \langle \lambda\vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \ (\forall \lambda \in \mathbb{R}) & - & \text{однорідність} \\ \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & - & \text{адитивність} \end{array}\right\}$ лінійність.

Лінійний простір, на якому заданий скалярний добуток, називається *евклідовим.* Відповідно, афінний простір, асоційований простір якого є евклідовим, називається афінним евклідовим простором, або просто евклідовим. Позначати евклідів n-вимірний простір будемо через $\mathbb{E}^n$.

Довжиною (модулем) вектора в $\mathbb{E}^n$ називається величина

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Косинусом кута між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в $\mathbb{E}^n$ називається така величина:

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

2.6 Метрична форма евклідового простору

Розглянемо випадок $n = 2$. Нехай $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – базис площини, а $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – довільні два вектори площини.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2,$$
$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2.$$

Скориставшись властивостями скалярного добутку, запишемо:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle = a_1b_1\langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle + a_1b_2\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle + a_2b_1\langle \vec{e_2}, \vec{e_1} \rangle +$$

$$+a_2b_2\langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle = \langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle a_1b_1 + \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle (a_1b_2 + a_2b_1) + \langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle a_2b_2.$$

Позначимо: $g_{11} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle, \quad g_{12} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle.$

Числа $g_{ij} = \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle$ називаються *метричними коефіцієнтами.*

Тоді вираз для скалярного добутку запишеться у вигляді

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2.$$

Права частина отриманого виразу називається *метричною формою* евклідової площини. Матриця

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею метричної форми* евклідової площини. Матриця метричної форми визначає скалярний добуток векторів.

У загальному випадку має місце повна аналогія. Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ базис в $\mathbb{E}^n$. Розкладемо довільні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ по базису

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + \dots + b_n\vec{e}_n.$$

Утворюємо симетричну матрицю G з елементами $g_{ik} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle$, тоді

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} a_i b_k.$$

Цю формулу можна переписати у матричному вигляді. Позначимо $\bar{a}^\top = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ – рядок координат вектора $\vec{a}$ (матриця розміру $1 \times n$), $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – стовпчик координат вектора $\vec{b}$ (матриця розміру $n \times 1$).

Тоді за правилом добутку матриць маємо

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \bar{a}^\top G \bar{b}.$$

Тобто $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_{i1} \ \sum_{i=1}^{n} a_i g_{i2} \ \dots \ \sum_{i=1}^{n} a_i g_{in} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} a_i b_k.$$

Приклад. Знайти кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, які задані своїми координатами в деякому базисі з метричною формою G:

$$\begin{matrix} \vec{a} = \{1, \ -1, 2\}, \\ \vec{b} = \{2, \ 0, -1\}, \end{matrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (1 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 15) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -11,$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = (1 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 15) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 31,$$

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = (2 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \ -5 \ -9) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 13,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{31},\ |\vec{b}| = \sqrt{13},\ \cos(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-11}{\sqrt{31 \cdot 13}}.$$

2.7 Скалярний добуток в ортонормованому базисі

Базис евклідового простору $\mathbb{E}^n$ називається *ортонормованим*, якщо

$$|\vec{e}_i| = 1, \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k,\ i,k = \overline{1,n}).$$

Тобто $g_{ii} = 1,\ g_{ik} = 0$ при $i \neq k$ $(i,k = \overline{1,n})$ і матриця метричної форми $\mathbb{E}^n$ відносно ортонормованого базису є одиничною.

Зокрема, при $n = 3$ маємо

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді для векторів, заданих своїми координатами

$$\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\},$$

відносно ортонормованого базису, маємо

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

У n-вимірному просторі скалярний добуток в ортонормованому базисі:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \bar{a}^\top \cdot \bar{b} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Як наслідок отримаємо важливу властивість матриці переходу C від одного ортонормованого базису $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ до іншого ортонормованого базису $\{\vec{e'}_1,\ \vec{e'}_2, \dots, \vec{e'}_n\}$. Стовпчиками матриці C (та рядками $C^\top$) є координати нових базисних векторів в ортонормованому базисі $\vec{e'}_i = \{c_{1i},\ c_{2i}, \dots, c_{ni}\}$. Розглянемо множення матриць:

$$C^\top C = \begin{pmatrix} \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_1, \vec{e'}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_1 \rangle \\ \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e'}_2, \vec{e'}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_1 \rangle & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{e'}_n, \vec{e'}_n \rangle \end{pmatrix} =$$

за визначенням метричних коефіцієнтів та ортонормованого базису маємо

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто для матриці переходу від ортонормованого базису до ортонормованого маємо

$$C^{-1} = C^{\top}.$$

Такі матриці називаються *ортогональними*. Іще одна властивість ортогональної матриці (доведіть самостійно):

$$\det C = \pm 1.$$

2.8 Геометричний зміст метричних коефіцієнтів

Нагадаємо, що

$$g_{ij} = \left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle = |\vec{e}_i||\vec{e}_j| \cos(\vec{e}_i \widehat{\ } \vec{e}_j).$$

Тоді

$$|\vec{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}, \quad \cos(\vec{e}_i \widehat{\ } \vec{e}_j) = \frac{\left\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle}{|\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}.$$

Приклад. Знайти довжини базисних векторів та кути між ними, якщо відома матриця метричної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1,\ |\vec{e}_2| = \sqrt{g_{22}} = 2,\ |\vec{e}_3| = \sqrt{g_{33}} = 3$$

$$\cos(\vec{e}_1 \widehat{\ } \vec{e}_2) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{-1}{2},\ \cos(\vec{e}_1 \widehat{\ } \vec{e}_3) = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} = 0,$$

$$\cos(\vec{e}_2 \widehat{\ } \vec{e}_3) = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Знаючи довжини базисних векторів та кути між ними, ми знаходимо метричні коефіцієнти, та навпаки.

Вправа. Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ афінної системи координат на площині дорівнюють відповідно $\sqrt{2}$ і 1, а кут між ними 45 градусів. Обчислити довжини сторін, діагоналей і кути паралелограма, побудованого на векторах, які мають в цьому базисі координати $\{2,\ 2\}$ і $\{-1,\ 4\}$.

Відповідь: сторони $\sqrt{10},\ \sqrt{20}$, діагоналі $\sqrt{10}, 5\sqrt{2}$, кути $45, 135$ градусів.

2.9 Векторний добуток

Вектор $\vec{c}$ називається *векторним добутком* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в $\mathbb{E}^3$, якщо

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a} \widehat{\ } \vec{b})$, тобто довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) система векторів $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ додатно орієнтована.

Векторний добуток вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо позначати через $[\vec{a}, \vec{b}\,]$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні (не паралельні), то ці три властивості визначають вектор $\vec{c}$ єдиним чином. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то за другою умовою довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює нулю, а єдиним вектором з нульовою довжиною є $\vec{0}$. Перевіримо виконання інших умов. Перша: нульовий вектор можна вважати ортогональним до будь-якого вектора. Третя умова не має сенсу, бо орієнтація була визначена для лінійно незалежних систем. Отже, вважаємо за визначенням, що

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Rightarrow\; [\vec{a}, \vec{b}\,] = \vec{0}.$$

Перевірте самостійно, що $[\vec{a}, \vec{b}\,] = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Векторний добуток має такі властивості:

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ – антисиметричність;

2) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{d}]$ – адитивність;

3) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ – однорідність.

Отримаємо формулу для обчислення векторного добутку в ортонормованому базисі. Нехай $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ – додатно орієнтований ортонормований базис, тобто вектори $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ мають одиничну довжину, взаємно ортогональні та додатно орієнтовані (базисні вектори декартової системи координат).

Користуючись визначенням векторного добутку, отримуємо

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3,\ [\vec{e}_1, \vec{e}_3] = -\vec{e}_2,\ [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1,\ [\vec{e}_i, \vec{e}_i] = \vec{0} \text{ для } i = 1, 2, 3.$$

Якщо $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, то використовуючи властивості лінійності та антисиметричності векторного добутку, отримуємо

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,\ b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3] = a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 +$$

$$+ a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Остання рівність – це не детермінант у повному сенсі, бо в першому рядку стоять не числа, а базисні вектори. Але цей формально записаний детермінант дуже зручний для обчислення координат векторного добутку.

Приклад. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,\ 0,\ 1),\ B(2,\ -2,\ 5)$, $C(3,\ 0,\ 0)$.

Площа трикутника ABC – це половина площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$.

Обчислимо векторний добуток $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, де $\vec{a} = \vec{AB} = \{1,\ -2,\ 4\}$, $\vec{b} = \vec{AC} = \{2,\ 0,\ -1\}$.

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= 2\vec{e}_1 - (-9)\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = \{2,\ 9,\ 4\}.$$

Щоб перевірити, чи не зробили ми помилки в обчисленнях, перевіримо ортогональність вектора $\vec{c}$ векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 4 = 2 - 18 + 16 = 0$, $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 9 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0$.

Довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{4 + 81 + 16} = \sqrt{101}$ – площа паралелограма, тобто $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{101}$.

Вправа. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(2,\ 1,\ 1)$, $B(4,\ -2,\ 4)$, $C(3,\ 0,\ 2)$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.10 Змішаний добуток

Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три вектори в $\mathbb{E}^3$. Тоді добуток $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$ називається *змішаним добутком трьох векторів.*

Нехай вектори $\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ і $\vec{c} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}$ задані своїми координатами в деякому ортонормованому базисі. Тоді

$$\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ця формула прямо випливає з формул для векторного та скалярного добутків в ортонормованому базисі. Дійсно,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}] \rangle =$$
$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ми використали формулу розкладання визначника за елементами третього стовпчика.

Перевірте самостійно, що

$$\langle \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}] \rangle = \langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle.$$

У зв'язку з цим, для змішаного добутку використовують таке позначення:

$$\left\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right\rangle = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Оскільки змішаний добуток – це визначник, стовпчики якого є координатами векторів, то всі властивості визначника сформульовані для стовпчиків, виконуються для змішаного добутку, а саме:

- змішаний добуток лінійний по кожному з множників, наприклад

$$(\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda_1 (\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c}) + \lambda_2 (\vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c});$$

- при переставлянні будь-яких двох векторів в змішаному добутку знак добутку змінюється на протилежний, наприклад

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c});$$

- якщо один з векторів є лінійною комбінацією інших, то змішаний добуток дорівнює нулю.

2.11 Геометричний зміст змішаного добутку

Зауважимо, що матриця C

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} -$$

матриця переходу від ортонормованого базису до системи векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
$\det C = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, тоді

- якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, тоді вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні (компланарні);
- якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, тоді вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні і орієнтовані додатно;
- якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні і орієнтовані від'ємно.

Розглянемо паралелепіпед, що натягнутий на вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Площа основи паралелепіпеда $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$, а висота $h = |\vec{c}| \cos(\vec{c}\,\widehat{\ }\,[\vec{a}, \vec{b}])$. Звідси

$$S \cdot h = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{c}\,\widehat{\ }\,[\vec{a}, \vec{b}]) = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V.$$

Тобто $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ – *об'єм паралелепіпеда*, натягнутого на вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Приклад. Знайти об'єм паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, якщо відомі координати вершини A та кінців ребер, що виходять з цієї вершини: $A(1,\ 2,\ -1)$, $B(2,\ 1,\ 4)$, $D(-1,\ 2,\ 3)$, $A'(3,\ 4,\ 2)$.

Знаходимо координати векторів (ребер):
$\overrightarrow{AB} = \{1,\ -1,\ 5\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-2,\ 0,\ 4\}$, $\overrightarrow{AA'} = \{2,\ 2,\ 3\}$.

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA'}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14(-1-2) = -42.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда $V = 42$, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ від'ємно орієнтовані.

Вправа. Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, яка проведена з вершини A, якщо відомі координати вершин: $A(1,\ 2,\ 2)$, $B(2,\ -1,\ 4)$, $C(-1,\ 2,\ 3)$, $D(3,\ 3,\ 3)$.

Відповідь: $\dfrac{17\sqrt{2}}{22}$.

Список літератури

1. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1968. – 176 с.
2. Борисенко О. А. Аналітична геометрія / О. А. Борисенко, Л. М. Ушакова. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.
3. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1985. – 303 с.

Навчальне видання

Курінний Григорій Чарльзович
Шугайло Олена Олексіївна

**ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Коректор М. С. Хащина
Комп'ютерне верстання О. О. Шугайло
Макет обкладинки І. М. Дончик

Формат 60×84/16. Умов. друк. арк. 1,75. Наклад 100 прим. Зам. № 72/12.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61077, м. Харків, м. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32