Питання до заліку з курсу “Диференціальна геометрія II” 2020/21, весна

1. Форми на гладкому многовиді. Кодиференціал відображення. Зовнішні форми. Зовнішній добуток і його властивості.
2. Зовнішній диференціал і його властивості.
3. Комплекс і когомології де Рама. Індукований морфізм. Гладкі гомотопії. Рівність морфізмів, що індуковані гладко гомотопними відображеннями.
4. Гладкі гомотопічні еквівалентності. Приклади. Гомотопічна інваріантність когомологій де Рама. Лема Пуанкаре.
5. Когомології де Рама сфер.
6. Інтегрування форм, розбиття одиниці, теорема Стокса. Побудова явного ізоморфізма між n-тими когомологіями n-вимірної сфери і числовою прямою.
7. Точні послідовності. Приклади. Коротка послідовність Маєра – Вієторіса.
8. Довга послідовність Маєра – Вієторіса. Приклад: когомології сфер.
9. Формула Кюннета (без доведення). Покриття Лере та їх існування. Скінченновимірність просторів когомологій. Когомологічний добуток. Парування просторів когомологій.
10. Оператор Ходжа ріманового многовида. Евклідів випадок. Коректність визначення і властивості оператора Ходжа.
11. Кодиференціал форми. Гармонічні форми на компактному многовиді та теорема Ходжа (без доведення). Невиродженість парування просторів когомологій і дуальність Пуанкаре.
12. Степінь відображення. Випадок несюр’єктивного відображення. Критичні точки і теорема Сарда. Формула для обчислення степіня відображення.
13. Приклади обчислення степіня відображення: теорема Хопфа (без доведення), голоморфні функції і основна теорема алгебри, гауссове відображення, теорема про причісування їжака. Некомпактний випадок.
14. Векторний аналіз на тривимірному рімановому многовиді: градієнт, ротор і дивергенція. Градієнт і дивергенція у загальному випадку. Внутрішній добуток.
15. Лапласіан ріманового многовида. Гармонічні функції та їхні властивості. Лапласіан у локальних координатах.
16. Оператор Лапласа – де Рама ріманового многовида і гармонічні форми. Дійсна ріманова теорія Ходжа.

17. Нерв покриття. Комплекс Чеха – де Рама. Узагальнення короткої послідовності Маєра – Вієторіса.
18. Комплекс і когомології Чеха. (Розширений) подвійний комплекс Чеха – де Рама, його властивості та когомології.
19. Теорема де Рама – Лере. Когомології Чеха гладкого многовида. Побудова явного ізоморфізма у теоремі де Рама – Лере.
20. Приклади обчислення когомологій Чеха: коло і двовимірна сфера. Узагальнення когомологій Чеха. Пучки.
21. Сингулярні гомології та когомології. Теорема де Рама (ідея доведення).
22. Локальні репери. Паралелізовність. Форми афінної зв'язності. Перетворення матриці форм зв'язності при заміні репера.
23. Форми скрута та кривини. Рівняння Маурера – Картана. Структурні рівняння Картана. Тотожності Біанкі. Зв'язність і кривина на векторному розшаруванні.
24. Випадок ріманового многовида. Існування геодезичного репера. Форми зв'язності та кривини в ортонормованому репері. Лапласіан в ортонормованому репері.
25. Інваріантні поліноми. Незалежність від вибору зв'язності когомологічного класу інваріантного полінома від матриці форм кривини.
26. Характеристичні класи. Класи і числа Понтрягіна. Пфаффіан і клас Ейлера. Характеристичні класи векторних розшарувань.
27. Геодезична кривина кривої на поверхні. Криволінійні багатокутники. Формула Гаусса – Бонне. Доведення для випадку кривої у околі з напівгеодезичними координатами.
28. Геодезичні багатокутники, їхня площа у поверхнях постійної кривини. Триангуляція. Теорема Радо. Теорема Уайтхеда (без доведення). Доведення формули Гаусса – Бонне у загальному випадку і формула Ейлера.
29. Ейлерова характеристика та її інваріантність. Приклади. Теорема Гаусса – Бонне та її застосування. Теорема Гаусса – Бонне – Чженя (без доведення).
30. Підмноговиди, що мінімізують об'єм. Варіації об'єму. Задача Плато (без доведення). Достатня умова мінімізації об'єму.
31. Мінімальні підмноговиди. Приклади. Тори Кліффорда. Гіпотеза Лоусона (без доведення). Мінімальні підмноговиди у евклідовому просторі. Умови мінімальності гіперповерхонь евклідового простору.
32. Явно задані мінімальні гіперповерхні евклідового простору. Приклади. Мінімізація об'єму для явно заданих мінімальних гіперповерхонь. Сильний принцип максимума для мінімальних гіперповерхонь (без доведення).
33. Представлення Веєрштрасса – Еннепера. Приклади.
34. Теорема Бернштейна. Багатовимірна задача Бернштейна (без доведення).

35. Загальні формули першої та другої варіацій об’єму. Критерій мінімальності. Існування нормальної варіації з даним полем.
36. Нормальний лапласіан. Оператор Якобі та запис формули другої варіації за його допомогою. Поля Якобі. Індексна форма. Стійкість мінімальних підмноговидів та індекс Морса.
37. Стійкість мінімальних гіперповерхонь. Приклад: катеноїд. Використання полів Якобі для доведення нестійкості.
38. Теореми Саймонса і Шоена – Яу про стійкість гіперповерхонь у многовидах невід’ємної кривини. Критерій Фішер-Колбрі – Шоена стійкості гіперповерхні (доведення в один бік). Опис повних стійких мінімальних поверхонь евклідового простору (без доведення).
39. Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини та гіперповерхні постійної середньої кривини (СМС). Приклади. Варіації, що зберігають обмежений об’єм, та їхні властивості.
40. Варіаційна характеризація СМС гіперповерхонь евклідового простору. Випадок гіперповерхні, що мінімізує об’єм. Сильний принцип максимума для СМС гіперповерхонь (без доведення) і теорема Александрова (ідея доведення). Стійкість СМС гіперповерхонь. Опис компактних стійких СМС поверхонь евклідового простору (без доведення).