Варіант 1

1. Показати, що дивергенція поля X на рімановому многовиді (M, g) з рімановою зв'язністю ∇ локально має вигляд

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i),$$

де $\{E_i\}_{i=1}^n$ – довільний локальний ортонормований репер.

2. Показати, що n-вимірний тор Кліффорда $r\colon T^n \to S^{2n-1}$, що заданий

$$(\rho \circ r)(u^1, \dots, u^n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\cos u^1, \sin u^1, \dots, \cos u^n, \sin u^n),$$

є мінімальним підмноговидом у $(2n-1)$-вимірній сфері. Тут $(u^1, \dots, u^n)$ – локальні координати на $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, що є кутовими параметрами відповідних кіл, а $\rho\colon S^{2n-1} \to E^{2n}$ – стандартне вкладення.

Варіант 2

1. Показати, що на сфері S^n при $n > 1$ не існує набору гладких полів $\{E_i\}_{i=1}^n$, що утворюють глобальний голономний репер, тобто лінійно незалежні в кожній точці і такі, що $[E_i, E_j] = 0$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$. Навести приклад гладких полів E_1, E_2 на S^3, лінійно незалежних в кожній точці і таких, що $[E_1, E_2] = 0$.

2. Показати, що якщо поверхня обертання

$$r\colon (a, b) \times S^1 \to E^3\colon (u, e^{iv}) \mapsto (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u)$$

є мінімальною, то це область на катеноїді.

Варіант 3

1. Показати, що для будь-якого кососиметричного $(2, 1)$-тензорного поля T на гладкому многовиді M (тобто такого, що $T(X, Y) = -T(Y, X)$ для будь-яких полів X і Y) існує афінна зв'язність зі скрутом T. Чи буде вона єдиною?

2. Перевірити, що гауссова кривина метрики $g = e^{2\omega(u,v)}(du^2 + dv^2)$ двовимірного ріманового многовида в ізотермічних координатах дорівнює $K = -e^{-2\omega}\Delta\omega$ (де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ позначає евклідів лапласіан). Вивести з цього формулу для гауссової кривини мінімальної поверхні, що задана представленням Веєрштрасса-Еннепера за допомогою функцій комплексної змінної f і g:

$$K = -\frac{4|g'_z|^2}{|f|^2\,(1 + |g|^2)^4}.$$

Варіант 4

1. Нехай (M, g) – орієнтований рімановий многовид, $(x^1, \dots, x^n)$ – локальні координати (що відповідають орієнтації), G – відповідна локальна матриця Грама метрики g, 1-форма $\gamma = \Gamma^i_{ji}\, dx^j$ – слід матриці форм ріманової зв'язності у цих координатах. Показати, що $\gamma = d \ln \sqrt{\det G}$. Вивести з цього, що коваріантна похідна (у рімановій зв'язності) ріманової форми об'єму у напрямку будь-якого поля дорівнює нулю.

2. Показати, що якщо лінійчата поверхня

$$r\colon (a, b) \times \mathbb{R} \to E^3\colon (s, t) \mapsto \gamma(s) + t\mu(s)$$

є мінімальною, то це область на гелікоїді або у площині (тут можна вважати, наприклад, що крива μ лежить у сфері, тобто $\langle \mu, \mu \rangle = 1$, і що параметр s натуральний для μ).

Варіант 5

1. Показати, що якщо афінна зв'язність ∇ на гладкому многовиді M має нульові срут і кривину, то вона пласка, тобто у околі кожної точки M існують локальні координати, у яких символи Крістоффеля ∇ нульові. Це можна зробити, наприклад, використавши формулу перетворення матриці форм зв'язності:

$$\widetilde{\omega} = C^{-1}\, dC + C^{-1}\, \omega\, C.$$

А саме, нехай ω – матриця форм зв'язності ∇ у деяких локальних координатах $(x^1, \dots, x^n)$ на околі $p \in M$. Показати, що умови $dC = -\omega\, C$ і $dD = D\, \omega$ задають у цьому випадку сумісні системи диференціальних рівнянь з невідомими компонентами матриць C і D, і що для розв'язків цих рівнянь $d(DC) = 0$; вивести, що можна обрати початкові умови так, що $DC = I$; перевірити, що, у свою чергу, система $\frac{\partial \widetilde{x^i}}{\partial x^j} = D^i_j$, $i, j = \overline{1, n}$ є сумісною, її розв'язки $(\widetilde{x^1}, \dots, \widetilde{x^n})$ є локальними координатами на деякому околі p, і у них символи Крістоффеля ∇ нульові.

2. Показати, що якщо зв'язна мінімальна поверхня в E^3 має постійну гауссову кривину, то це область на площині.

Варіант 6

1. Нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ – локальний репер на підмножині U гладкого многовида M, і $[E_i, E_j] = 0$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$. Показати, що на U існує афінна зв'язність ∇ така, що $\nabla_X E_i = 0$ для будь-яких поля X і $i = \overline{1, n}$. Чому дорівнюють скрут і кривина цієї зв'язності?

2. На нормалях поверхні M в E^3 відкладаються відрізки постійної довжини a. Множина кінців таких відрізків утворює поверхню $\widetilde{M}$, паралельну M (вважаємо, що вона регулярна). Нехай M мінімальна, не має точок сплощення, і $a^2 < -\frac{1}{K}$, де K – гауссова кривина M. Показати, що при цьому площа будь-якої кубовної підмножини D в M буде не меншою за площу відповідної підмножини $\widetilde{D}$ у $\widetilde{M}$.

Варіант 7

1. Вивести з другої тотожності Біанкі для форм і умови нульового скрута афінної зв'язності ∇ на гладкому многовиді M, що її тензор кривини R задоволняє умові

$$(\nabla_X \mathrm{R})(Y, Z)W + (\nabla_Y \mathrm{R})(Z, X)W + (\nabla_Z \mathrm{R})(X, Y)W = 0$$

для будь-яких полів X, Y, Z і W на M.

2. Нехай мінімальна поверхня у E^3 задана представленням Веєрштрасса-Еннепера за допомогою функцій комплексної змінної f і g. Показати, що для будь-якого значення α функції $e^{i\alpha} f$ і g задають мінімальну поверхню, що ізометрична даній (вона зветься асоційованою з нею). Виписати рівняння сімества поверхонь, асоційованих з поверхнею Еннепера (у представленнях брати $z_0 = 0$, $c^1 = c^2 = c^3 = 0$).

Варіант 8

1. Нехай (M, ∇) – многовид з афінною зв'язністю, $\{E_i\}_{i=1}^n$ і $\{\widetilde{E_i}\}_{i=1}^n$ – локальні репери на $U \subset M$, що пов'язані співвідношеннями $\widetilde{E_i} = C_i^j\, E_j$, $i = \overline{1, n}$, $C = (C_i^j)_{i,j=\overline{1,n}}$ – відповідна матриця перехода, ω і $\widetilde{\omega}$ – матриці форм зв'язності ∇ у цих реперах, $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ і $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}$ – відповідні матриці форм кривини. Показати, що

$$\widetilde{\omega} = C^{-1}\, dC + C^{-1}\, \omega\, C.$$

Вивести з цього, що $\widetilde{\Omega} = C^{-1}\, \Omega\, C$.

2. Показати, що узагальнений гелікоїд $r \colon \mathbb{R}^{n+1} \to E^{n+k+1}$, що заданий

$$r(u^1, \dots, u^{n+1}) = (u^1 \cos u^{n+1}, u^1 \sin u^{n+1}, \dots, u^k \cos u^{n+1}, u^k \sin u^{n+1}, u^{k+1}, \dots, u^{n+1}),$$

є мінімальним підмноговидом у E^{n+k+1}.