Варіант 1

1. Нехай ω – невироджена зовнішня 2-форма на парновимірному гладкому многовиді M. Аналогічно до ріманової метрики визначимо операцію $(\cdot)^\flat\colon \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)\colon X \mapsto \omega(X,\cdot)$ і обернену $(\cdot)^\sharp\colon \Omega^1(M) \to \mathcal{X}(M)$. Дужкою Пуассона, що відповідає ω, зветься білінійне кососиметричне відображення $\{\cdot,\cdot\}\colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)\colon f, g \mapsto \{f, g\} \coloneqq \omega(df^\sharp, dg^\sharp)$. Показати, що ω замкнена (є симплектичною формою) тоді і тільки тоді, коли $\{\cdot,\cdot\}$ задовольняє тотожність Якобі

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

для будь-яких $f, g, h \in C^\infty(M)$. Для цього можна, наприклад, використати локальні координати $(x^1,\dots,x^n)$: якщо у них $\omega = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, то $\{f,g\} = a^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$, де a^{ij} – компоненти матриці, що обернена до матриці $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1}^n$ (перевірити це).

2. Відомо, що непарновимірний дійсний проективний простір $\mathbb{R}P^{2k-1}$ – орієнтовний (компактний зв'язний гладкий) многовид. Знайти степінь канонічної проекції $\pi\colon S^{2k-1} \to \mathbb{R}P^{2k-1}\colon (x^1,\dots,x^{2k}) \mapsto (x^1 : \dots : x^{2k})$.

Варіант 2

1. Перевірити безпосередньо, що вираз для лапласіана

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

не залежить від вибору локальних координат.

2. Перевірити, що відображення $f\colon S^n \to S^n$, що переводить точки

$$(\cos x^1 \dots \cos x^n,\ \cos x^1 \dots \cos x^{n-1}\, \sin x^n,\ \cos x^1 \dots \cos x^{n-2}\, \sin x^{n-1},\ \dots,\ \cos x^1\, \sin x^2,\ \sin x^1)$$

у точки

$$(\cos x^1 \dots \cos kx^n,\ \cos x^1 \dots \cos x^{n-1}\, \sin kx^n,\ \cos x^1 \dots \cos x^{n-2}\, \sin x^{n-1},\ \dots,\ \cos x^1\, \sin x^2,\ \sin x^1),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, коректно визначене, гладке і має степінь k.

Варіант 3

1. Відомо, що якщо гладке відображення сфер $f\colon S^n \to S^n$ непарне (тобто для кожної точки $x \in S^n$ переводить діаметрально протилежні точки $x, -x$ у діаметрально протилежні: $f(-x) = -f(x)$), то воно індукує ненульове відображення в n-тих когомологіях сфери. Вивести з цього, що для будь-якого гладкого $g\colon S^m \to \mathbb{R}^{n+1}$, де $m > n$, існує $y \in S^m$ така, що $g(y) = g(-y)$ (це одне з формулювань теореми Борсука-Улама).

2. Встановити, чи існує гладке відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таке, що $f(x) \neq 0$ для $x \neq 0$ і $x \perp f(x)$ для будь-якого x.

Варіант 4

1. Обчислити когомології пляшки Клейна. Пересвідчитися у тому, що дуальність Пуанкаре, взагалі кажучи, невірна для компактних неорієнтовних многовидів.

2. Нехай гладке відображення сфер $f\colon S^n \to S^n$ має непарний степінь. Показати, що

Варіант 5

1. Обчислити когомології проективної площини $\mathbb{R}P^2$ (наприклад, за допомогою послідовності Маєра-Вієторіса і розбиття $\mathbb{R}P^2$ на диск і лист Мебіуса або за допомогою когомологій Чеха). Пересвідчитися у тому, що дуальність Пуанкаре, взагалі кажучи, невірна для компактних неорієнтовних многовидів.

2. Показати, що якщо гладке відображення $f\colon S^1 \to S^1$ непарне (тобто для кожної точки $x \in S^1$ переводить діаметрально протилежні точки $x, -x$ у діаметрально протилежні: $f(-x) = -f(x)$), то воно має непарний степінь. Вивести з цього (гладку) теорему Борсука-Улама: не існує непарного гладкого $f\colon S^n \to S^1$ при $n > 1$.

Варіант 6

1. Побудувати покриття Лере S^2, нервом якого є тетраедр, і обчислити його когомології Чеха.

2. Нехай $f, g\colon X \to S^n$ – неперервні відображення з деякого топологічного простору у сферу. Показати, що якщо для будь-якого $x \in X$ $f(x)$ і $g(x)$ не є діаметрально протилежними, то ці відображення гомотопні, а якщо f і g гладкі (а X – гладкий многовид), то гладко гомотопні.

Варіант 7

1. Показати, що якщо гладке відображення $f\colon M \to N$ орієнтованих компактних зв'язних гладких многовидів однакової вимірності (гладко) гомотопне постійному, то у нього є критичні точки.

2. Встановити, чи існує на сфері S^n гладке парне векторне поле X (тобто таке, що $X_x = X_{-x}$ для кожної точки $x \in S^n$, де $-x$ – діаметрально протилежна до неї точка), що в жодній точці не дорівнює 0.

Варіант 8

1. Нехай ω – невироджена зовнішня 2-форма на $2m$-вимірному гладкому многовиді M, що має у локальних координатах $(x^1, \ldots, x^{2m})$ вигляд $\omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$. Показати, що її m-тий зовнішній ступінь у цих координатах дорівнює

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{m} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{1}{m!} \operatorname{Pf} \omega \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2m},$$

де $\operatorname{Pf} \omega$ – пфаффіан кососиметричної локальної матриці $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1}^{2m}$ цієї форми. Вивести з цього, що M орієнтовний.

2. Нехай M_1, M_2, N_1, N_2 – орієнтовані компактні зв'язні гладкі многовиди, $\dim M_1 = \dim N_1$, $\dim M_2 = \dim N_2$, $f_1\colon M_1 \to N_1$, $f_2\colon M_2 \to N_2$ – гладкі відображення. Показати, що $\deg(f_1 \times f_2) = \deg f_1 \, \deg f_2$, де $f_1 \times f_2\colon M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2\colon (p_1, p_2) \mapsto (f_1(p_1), f_2(p_2))$.