Функціональний аналіз

Лекція 24

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай X – метричний простір. Нагадаємо, що відстанню від точки $x \in X$ до непорожньої підмножини $A \subset X$ називається число $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Зазначимо, що точка $x \in \overline{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\rho(x, A) = 0$.

Односторонньою дистанцією Гаусдорфа (F. Hausdorff) між непорожніми множинами $A, B \subset X$ називається величина

$$\widetilde{\rho}_H(A, B) = \sup_{b \in B} \rho(b, A),$$

а дистанцією Гаусдорфа між $A, B \subset X$ називається

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \widetilde{\rho}_H(A, B),\ \widetilde{\rho}_H(B, A) \right\}.$$

Зауваження. Дистанція Гаусдорфа між двома множинами та ж сама, як і між замиканнями цих множин: $\rho_H(A, B) = \rho_H(\overline{A}, \overline{B})$.

Позначимо $\mathsf{bc}(X)$ сім'ю всіх непорожніх обмежених замкнених підмножин простору X.

Теорема 1. Дистанція Гаусдорфа задає метрику на $\mathsf{bc}(X)$.

Доведення. Подробиці на "дошці". $\square$

Лема 1. Нехай X – повний метричний простір, $\varepsilon_n > 0$ з

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty.$$

Тоді будь-яка послідовність $(x_n) \subset X$, для якої $\rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$, має границю.

Доведення. За цієї умови (x_n) – послідовність Коші. Подробиці на "дошці". □

Лема 2. Якщо Z – метричний простір, $\varepsilon_n > 0$ з $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$, і простір Z має таку властивість: будь-яка послідовність $(z_n) \subset Z$, для якої $\rho(z_n, z_{n+1}) < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$, має границю. Тоді Z – повний метричний простір.

Доведення. Нехай (x_n) – послідовність Коші в Z. Ми будемо користуватися таким загальним фактом, що для доведення збіжності послідовності Коші достатньо довести, що вона містить збіжну підпослідовність.

Оскільки (x_n) – послідовність Коші, існує номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $\rho(x_k, x_j) < \varepsilon_1$ для всіх $k, j \geqslant n_1$. Аналогічно, існує номер $n_2 > n_1$ такий, що $\rho(x_k, x_j) < \varepsilon_2$ для всіх $k, j \geqslant n_2$; існує номер $n_3 > n_2$ такий, що $\rho(x_k, x_j) < \varepsilon_3$ для всіх $k, j \geqslant n_3$, тощо.

Тоді послідовність $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ задовольняє вимогу

$$\rho\left(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right) < \varepsilon_k, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

тобто, відповідно до умов Леми, має границю. □

Теорема 2. Якщо X – повний метричний простір, то $(\mathrm{bc}(X), \rho_H)$ також повний.

Доведення. Користуватимемося лемою 2. Зафіксуємо якусь послідовність чисел $\varepsilon_n > 0$ з $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$ та розглянемо послідовність $(A_n) \subset \mathrm{bc}(X)$, для якої $\rho_H(A_n, A_{n+1}) < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Позначимо A множину всіх тих $x \in X$, для яких існує відповідна послідовність $x_n \in A_n$ з $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, така, що $\rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Наша мета – довести, що $\overline{A} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Для цього потрібно довести два співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}_H(A_n, A) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}_H(A, A_n) = 0.$$

Для першого співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}_H(A_n, A) = 0$$

покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\rho}_H(A_n, A) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

тобто для кожного $x \in A$ маємо $\rho(x, A_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$.
(Подробиці на “дошці”.)

Для другого співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}_H(A, A_n) = 0$$

покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\rho}_H(A, A_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

тобто для кожного $y \in A_n$ маємо $\rho(y, A) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$.
(Подробиці на “дошці”.) □

Позначимо $\mathrm{comp}(X)$ підпростір простору $\mathrm{bc}(X)$, що складається з компактних множин. Іншими словами, $\mathrm{comp}(X)$ – це сім'я всіх непорожніх компактних підмножин простору X, з дистанцією Гаусдорфа в якості метрики.

Зауважимо, що якщо X – повний метричний простір, то $\mathrm{comp}(X)$ – замкнений підпростір простору $\mathrm{bc}(X)$, тобто $\mathrm{comp}(X)$ також повний.

Нехай X – метричний простір, $S_i \colon X \to X$, $i = 1, 2, \dots, n$ – стискальні відображення. Підмножина $E \in \mathrm{comp}(X)$ називається самоподібною відносно сім'ї стисків $\{S_i\}_{i=1}^n$, якщо

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(E).$$

Теорема 1. Якщо X – повний метричний простір, то для будь-якої сім'ї стисків $\{S_i\}_{i=1}^n$ існує єдина самоподібна відносно $\{S_i\}_{i=1}^n$ підмножина $E \in \mathrm{comp}(X)$.

Доведення. Подробиці на "дошці".

□

Приклади побудови на "дошці": канторова множина; трикутник Серпинського.