Функціональний аналіз

Лекція 23

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай на множині X задано відображення $f\colon X \to X$. Елемент $x \in X$ називається нерухомою точкою відображення f, якщо

$$f(x) = x.$$

До задачі пошуку нерухомих точок можна звести багато дуже несхожих на перший погляд задач з різних галузей математики. Тому кожна з теорем про існування нерухомих точок, що викладається в останній частині нашого курсу, має численні і часто дуже витончені застосування.

Нехай X – метричний простір. Функція $f\colon X \to X$ називається відображенням стиску або стискальним відображенням, якщо існує така стала $C \in [0, 1)$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leqslant C\rho\left(x_1, x_2\right) .$$

Питання. Стискальне відображення неперервне. Чому?

Теорема Банаха про стискальне відображення. Нехай X – повний метричний простір, $f\colon X \to X$ – відображення стиску. Тоді у відображення f існує єдина нерухома точка $x_0 \in X$.
Більше того, для будь-якого $y_0 \in X$ послідовність ітерацій (y_n), що задається рекурентною формулою $y_n = f(y_{n-1})$, збігається до x_0.
Доведення. Почнемо з єдиності. Нехай $x_0, x_1 \in X$ – нерухомі точки відображення f. Тоді

$$\rho\left(x_0, x_1\right) = \rho\left(f(x_0), f(x_1)\right) \leqslant C\rho\left(x_0, x_1\right),$$

де $C < 1$ – стала з означення стискального відображення. Нерівність $\rho\left(x_0, x_1\right) \leqslant C\rho\left(x_0, x_1\right)$ може виконуватись, тільки якщо $\rho\left(x_0, x_1\right) = 0$.

Перейдемо до властивостей послідовності y_n. Введемо позначення $d = \rho(y_0, y_1)$. Послідовно підставляючи в оцінку

$$\rho(y_n, y_{n+1}) = \rho(f(y_{n-1}), f(y_n)) \leqslant C\rho(y_{n-1}, y_n)$$

значення $n = 1,\ 2,\ ...$, отримаємо, що
$\rho(y_1, y_2) \leqslant Cd$, $\rho(y_2, y_3) \leqslant C^2 d$, $\ldots$, $\rho(y_n, y_{n+1}) \leqslant C^n d$.
Отже, для будь-яких $n < m$ маємо:

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + \rho(y_{m-1}, y_m) \leqslant$$

$$\leqslant \left(C^n + C^{n+1} + ...\right) d = \frac{C^n d}{1 - C} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

З огляду на повноту простору це означає, що послідовність (y_n) збігається. Позначимо границю цієї послідовності через x_0. Залишилось довести, що x_0 – нерухома точка відображення f. Справді,

$$\rho(x_0, f(x_0)) \leqslant \rho(x_0, f(y_n)) + \rho(f(y_n), f(x_0)) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x_0, y_{n+1}) + C\rho(y_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тобто $\rho(x_0, f(x_0)) = 0$, і $x_0 = f(x_0)$. □

Запам'ятаємо отриману оцінку

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \frac{C^n d}{1 - C}:$$

вона нам знадобиться на наступному слайді.

Оцінка швидкості наближення y_n до нерухомої точки x_0:

$$\rho(y_n, x_0) \leqslant \frac{C^n d}{1 - C}, \tag{1}$$

де C – константа стискання, а $d = \rho\,(y_0, y_1)$.

(Приклад застосування на “дошці”).

Вправа 23.1. Наведіть приклад стискального відображення на прямій, для якого оцінка не покращується.

Приклад. Нехай X – нормований простір. Для того, щоб лінійний оператор $T\colon X \to X$ здійснював відображення стиску, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\|T\| < 1$. Що буде в цьому випадку з нерухомою точкою?

Застосування: Теорема про мале збурення одиничного оператора.

Нехай X – банаховий простір, $T \in L(X)$ і $\|T\| < 1$. Тоді оператор $I - T$ оборотний.

Вправи

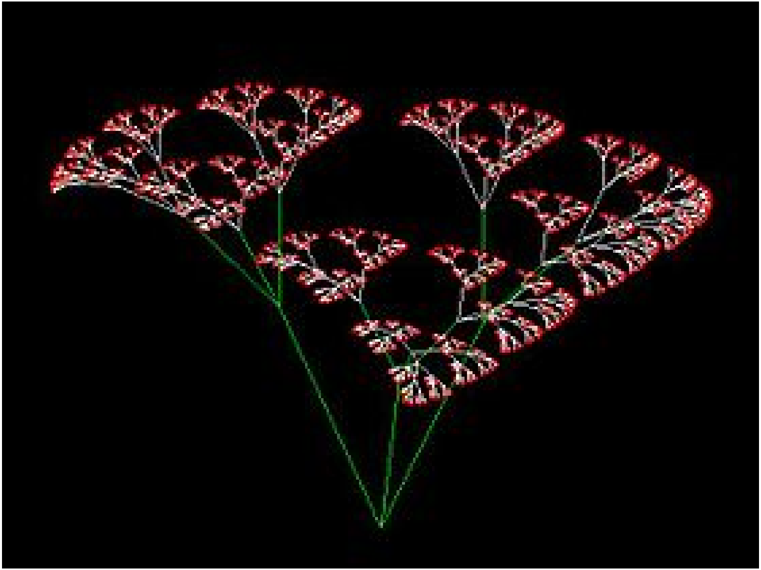
23.2. Властивість бути відображенням стиску в нормованому просторі може порушуватись при заміні вихідної норми на еквівалентну. Наведіть приклад.

23.3. Опишіть відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, які є стискальними в усіх нормах на $\mathbb{R}^2$.

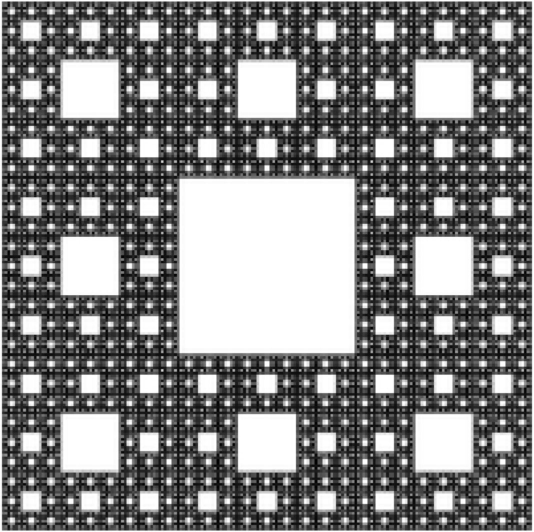
23.4. Нехай X – повний метричний простір, K – компакт і неперервна функція $F\colon K \times X \to X$ є рівномірно стискальною за другою змінною: існує така стала $C \in [0,1)$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ і будь-якого $t \in K$ виконується нерівність $\rho(F(t,x_1), F(t,x_2)) \leqslant C\rho(x_1,x_2)$. Тоді для будь-якого $t \in K$ існує єдиний розв'язок x рівняння $F(t,x) = x$ причому цей розв'язок $x(t)$ неперервно залежить від t.

Нехай X – метричний простір, $S_i\colon X \to X$, $i = 1, 2, \ldots, n$ стискальні відображення. Непорожня замкнена підмножина $E \subseteq X$ називається самоподібною відносно сім'ї стисків $\{S_i\}_{i=1}^{n}$, якщо

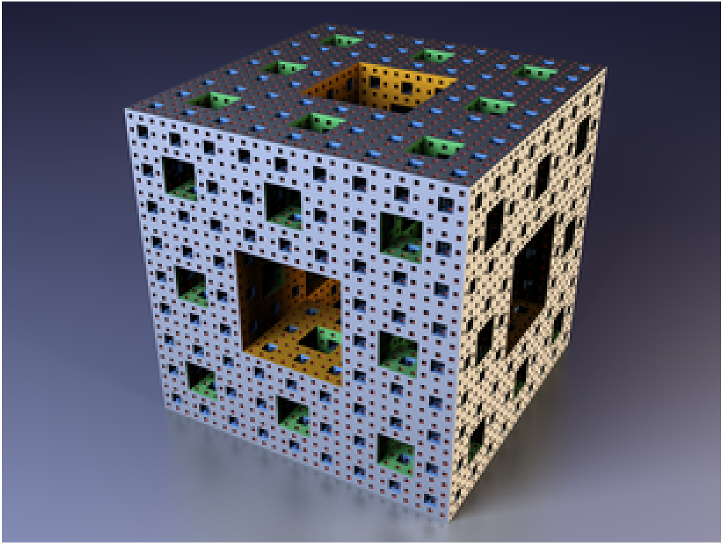
$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(E).$$



Ковёр Серпинского



Губка Менгера



Нехай X – метричний простір. Нагадаємо, що відстанню від точки $x \in X$ до непорожньої підмножини $A \subset X$ називається число $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Зазначимо, що точка $x \in \overline{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\rho(x, A) = 0$.

Односторонньою дистанцією Гаусдорфа (F. Hausdorff) між непорожніми множинами $A, B \subset X$ називається величина

$$\widetilde{\rho}_H(A, B) = \sup_{b \in B} \rho(b, A),$$

а дистанцією Гаусдорфа між $A, B \subset X$ називається

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \widetilde{\rho}_H(A, B),\ \widetilde{\rho}_H(B, A) \right\}.$$

Зауваження. Дистанція Гаусдорфа між двома множинами та ж сама, як і між замиканнями цих множин: $\rho_H(A, B) = \rho_H(\overline{A}, \overline{B})$.

Позначимо $\mathsf{bc}(X)$ сім'ю всіх непорожніх обмежених замкнених підмножин простору X.

Теорема 1. Дистанція Гаусдорфа задає метрику на $\mathsf{bc}(X)$.

Доведення. Подробиці на "дошці". $\square$