Функціональний аналіз

Лекція 22

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Число λ називається власним числом оператора $T \in L(H)$, якщо існує такий ненульовий елемент $x \in H$, який називається власним вектором, що відповідає числу λ, що $Tx = \lambda x$.

В нас вже був приклад самоспряженого оператора без власних чисел: оператор $T \in L(L_2[0,1])$, який діє за правилом $(Tx)(t) = tx(t)$.

Приклад компактного оператора без власних чисел. Оператор $T \in L(L_2[0,1])$, який діє за правилом $(Tx)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$. Припустимо, що існує власне число λ із власним вектором x. Тоді

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = \lambda x(t) \text{ майже скрізь.}$$

У випадку $\lambda \neq 0$ з цього випливає неперервність функції x, потім з неперервності функції під інтегралом – диференційовність функції x в усіх точках, і, отже, $x(t) = \lambda x'(t)$, $x(0) = 0$.

У такої задачі Коші є єдиний розв'язок $x \equiv 0$, тобто в оператора T немає ненульових власних чисел. У випадку $\lambda = 0$ умова

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = \lambda x(t) \text{ майже скрізь.}$$

перепишеться у вигляді $\int_0^t x(\tau)d\tau = 0$ майже скрізь. З теореми про похідну інтеграла як функції верхньої межі інтегрування отримуємо, що $x = 0$ майже скрізь. □

Ми доведемо, що якщо оператор водночас самоспряжений і компактній, то власні числа існують. Більше того, власних векторів настільки багато, що можна побудувати ортонормований базис усього простору лише з власних векторів оператора T. Такий базис значно спрощує роботу з оператором, зокрема, полегшує розв'язання рівнянь типу $Tx = b$.

Нехай X, Y – гільбертові простори, оператор $T \in L(X, Y)$, $\{e_n\}$ і $\{g_m\}$ – ортонормовані базиси в X і Y відповідно. Оператор задано, якщо відомі образи Te_n всіх елементів базису, оскільки лінійна оболонка базису – щільна підмножина в X, а оператор T неперервний. Кожен елемент простору Y зображується у вигляді ряду $y = \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, g_m \rangle g_m$, зокрема, $Te_n = \sum_{m=1}^{\infty} \langle Te_n, g_m \rangle g_m$. Отже, числа $t_{m,n} = \langle Te_n, g_m \rangle$ цілком визначають оператор T.

Набір чисел $t_{m,n} = \langle Te_n, g_m \rangle$, $n, m \in \mathbb{N}$ називається матрицею оператора T в базисах $\{e_n\}$, $\{g_m\}$. У цих позначеннях $Te_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{m,n} g_m$, тобто, так само, як і в курсі лінійної алгебри n-ний стовпчик матриці оператора складається з коефіцієнтів розкладу елемента Te_n за базисом $\{g_m\}$.
У випадку одного простору H, тобто $X = Y = H$, зазвичай беруть один базис $\{e_n\}$ замість двох, і визначають матрицю оператора $T \in L(H)$ формулою $t_{m,n} = \langle Te_n, e_m \rangle$

Вправа 22.1. Нехай в якомусь ортонормованому базисі $\{e_n\}$ простору H матриця оператора $T \in L(H)$ має діагональний вигляд. Доведіть, що тоді e_n є власними векторами, а діагональні елементи матриці – власними числами оператора T. Сформулюйте і доведіть зворотне твердження.

Теорема 1. Нехай T – самоспряжений оператор в гільбертовому просторі H. Тоді всі власні числа оператора T – це дійсні числа.

Доведення. Розглянемо власне число λ із власним вектором x. Тоді $Tx = \lambda x$. Помножимо обидві частини на x:

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

З цього випливає, що $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Нехай λ – власне число оператора $T \in L(H)$. Власним підпростором, відповідним власному числу λ, називається множина $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$. Іншими словами, власний підпростір, відповідний власному числу λ, складається векторів, що задовольняють рівняння $Tx = \lambda x$, тобто з власних векторів, що відповідають власному числу λ, і нульового вектора.

Підпростір $Y \subset H$ називається інваріантним підпростором оператора $T \in L(H)$, якщо $T(Y) \subset Y$.

Власний підпростір – це очевидний приклад інваріантного підпростору. Навпаки, знання інваріантних підпросторів може допомогти при пошуку власних векторів і власних чисел. Наприклад, якщо в оператора $T \in L(X)$ є скінченновимірний інваріантний підпростір Y, то обмеження оператора T на цей підпростір – це вже оператор у скінченновимірному просторі, і в цьому підпросторі в оператора є власні вектори.

Теорема 2. Якщо X – інваріантний підпростір самоспряженого оператора A, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ цього підпростору також буде інваріантним підпростором.

Доведення. Потрібно довести, що для будь-якого елемента $y \in X^{\perp}$ його образ Ay також лежить в $X^{\perp}$. Для цього треба перевірити, що $\langle x, Ay \rangle = 0$ для будь-якого $x \in X$. Але $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$, а $\langle Ax, y \rangle = 0$, оскільки $Ax \in X$ (інваріантність підпростору X), а $y \in X^{\perp}$. $\square$

Теорема 3. Нехай $X_1 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 I)$, $X_2 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 I)$ – власні підпростори самоспряженого оператора A, відповідні двом різним власним числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді $X_1 \perp X_2$.

Доведення. Для будь-яких $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ маємо

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle ,$$

що можливо тільки при $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. □

Теорема 4. Нехай λ – власне число оператора $T \in L(H)$. Тоді $|\lambda| \leqslant \|T\|$.

Доведення. Розглянемо власний вектор $x \in H \setminus \{0\}$, відповідний числу λ. Тоді $|\lambda| = \frac{\|\lambda x\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|$. □

Теорема 4. Нехай T – компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі H. Тоді існує власне число λ оператора T з $|\lambda| = \|T\|$. Тобто $\|T\|$ дорівнює максимальному можливому значенню модуля власних чисел.

Доведення. У випадку $\|T\| = 0$ нема чого доводити: оператор дорівнює нулю в усіх точках, тобто усі ненульові елементи простору – це власні вектори з власним числом 0. Тому у подальшому $\|T\| \neq 0$. Нагадаємо, що

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x\rangle|,$$

Оберемо таку послідовність $x_n \in S_H$, що

$$\left|\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle\right| = \|T\|.$$

Оскільки всі значення $\langle Tx, x\rangle$ – це дійсні числа, маємо два можливі випадки:

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \|T\|, \text{ або ж } \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = -\|T\|.$$

Другий випадок можна звести до першого заміною оператора T на $-T$. Тому без обмеження загальності можемо вважати, що

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \|T\|.$$

За означенням компактного оператору, послідовність векторів Tx_n міститься у передкомпакті $T(S_H)$, тобто в послідовності x_n можна знайти таку підпослідовність y_n, що значення Ty_n мають границю. Позначимо $y = \lim_{n\to\infty} Ty_n$. Маємо

$$\|T\| \geqslant \|Ty_n\| \geqslant \langle Ty_n, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \|T\|,$$

тобто $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|Ty_n\| = \|y\|$.

Далі,

$$\|Ty_n - \|T\|y_n\|^2 = \|Ty_n\|^2 - 2\|T\|\langle Ty_n, y_n\rangle + \|T\|^2\|y_n\|^2,$$

тобто

$$\|Ty_n - \|T\|y_n\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

Оскільки

$$Ty_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y, \tag{2}$$

З (1) випливає, що $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{y}{\|T\|}$. Відповідно, $Ty_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{Ty}{\|T\|}$.

Порівнявши з (2), отримуємо $Ty = \|T\|y$, тобто y – власний вектор, а $\|T\|$ – власне число. □

Теорема 5. Нехай $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H. Тоді або T має скінченну кількість власних чисел, або ж власні числа утворюють послідовність, що прямує до нуля.

Доведення. Припустимо, що твердження невірне. Тоді існує $\varepsilon > 0$ та деяка послідовність попарно різних власних чисел $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, з $|\lambda_n| > \varepsilon$. Оберемо для кожного λ_n відповідний власний вектор $x_n \in S_H$. Тоді, з одного боку, в послідовності Tx_n міститься якась збіжна підпослідовність, а з іншого боку попарні відстані між векторами Tx_n відокремлені від нуля: $\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} > \sqrt{2}\varepsilon$. Протиріччя. □

Теорема 6. Нехай $T \in L(H)$ – компактний оператор в гільбертовому просторі H. Тоді власні підпростори, відповідні ненульовим власним числам, скінченновимірні.

Доведення. Нехай Y – власний підпростір, відповідний числу λ. З огляду на те, що обмеження оператора T на підпростір Y дорівнює оператору λI_Y, отримуємо компактність одиничного оператору I_Y на просторі Y. Одиничний оператор в нескінченновимірному просторі не компактний, тобто Y має бути скінченновимірним. $\square$

Теорема 7. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор. Виберемо в кожному з власних підпросторів оператора T по ортонормованому базису і випишемо всі ці базиси в єдину послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортономований базис простору H. Тобто існує ортономований базис, який складається з власних векторів оператора T.

Доведення. Всі e_n – це власні вектори оператора T, причому з огляду на теорему 3 вони утворюють ортонормовану систему. Доведемо повноту цієї системи. Позначимо $X := \overline{\mathrm{Lin}}\, \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Підпростір X інваріантний для T і містить всі його власні вектори. Отже, підпростір $X^{\perp}$ також буде інваріантним. Якби $X^{\perp}$ був ненульовим, застосовуючи теорему 4 до обмеження оператора T на $X^{\perp}$ ми б отримали існування якогось власного вектора в $X^{\perp}$, але ж всі власні вектори містяться в X! Це означає, що підпростір $X^{\perp}$ складається лише з нуля, тобто $X = H$. □

Нарешті, зберемо для зручності щойно доведені основні властивості в одну теорему, яку зазвичай називають спектральною теоремою для компактного самоспряженого оператора.

Теорема 9. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор. Тоді

1. Всі власні числа оператора T – це дійсні числа, що містяться на відрізку $[-\|T\|, \|T\|]$.
2. Принаймні одно з чисел $-\|T\|, \|T\|$ є власним числом оператора T.
3. Власних чисел або скінчена кількість, або ж вони утворюють послідовність, що прямує до нуля.
4. Існує ортономований базис, який складається з власних векторів оператора T. □