Функціональний аналіз

Лекція 21

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Теорема 5 попередньої лекції. Множина компактних операторів $K(H_1, H_2)$ має такі властивості:

(1) $K(H_1, H_2)$ – лінійний підпростір в $L(H_1, H_2)$.

(2) $K(H_1, H_2)$ – операторний ідеал, тобто якщо $T \in K(H_1, H_2)$, то добутки AT і TU компактні для будь-яких неперервних операторів A, U, для яких мають сенс відповідні композиції.

(3) Множина $K(H_1, H_2)$ замкнена в $L(H_1, H_2)$ в сенсі збіжності за нормою[1].

[1] Звертаємо увагу, що замкненості в сенсі поточкової збіжності тут немає.

Доведення. (1). Стійкість щодо множення на скаляр очевидна, а стійкість щодо додавання випливає зі співвідношення

$$(T_1 + T_2)(B_{H_1}) \subset T_1(B_{H_1}) + T_2(B_{H_1})$$

і того, що сума передкомпактів – передкомпакт.

(2). Нехай $U \in L(Z, H_1)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору Z під дією оператора U переходить в обмежену множину, яку, у свою чергу, оператор T переводить у передкомпакт. Тому оператор TU компактний.

Нехай тепер $A \in L(H_2, Z)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору H_1 переходить під дією оператора T в передкомпакт, який, у свою чергу, переводиться оператором A також у передкомпакт.

(3). Нехай послідовність компактних операторів T_n збігається за нормою до оператора T: $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Потрібно довести компактність граничного оператора. Для цього зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і побудуємо передкомпактну ε-сітку для $T(B_{H_1})$. Виберемо такий номер n, що $\|T - T_n\| < \varepsilon$. Розглянемо передкомпакт $K = T_n\left(B_{H_1}\right)$. Для будь-якого $x \in B_{H_1}$ маємо

$$\|Tx - T_n x\| \leqslant \|T - T_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

Отже, K утворює шукану ε-сітку. $\square$

Оскільки скінченновимірні оператори є компактними, попередня теорема зокрема каже, що якщо послідовність скінченновимірних операторів T_n збігається за нормою до оператора T, то T компактний. Наступна теорема показує, що зворотне твердження також має місце, тобто наближуваність скінченновимірними – це характеристична властивість компактних операторів.

Теорема. Нехай H_1, H_2 – гільбертові простори, $T \in K(H_1, H_2)$ – компактний оператор, $\varepsilon > 0$. Тоді існує скінченновимірний оператор $T_\varepsilon \in K(H_1, H_2)$ з $\|T - T_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$.

Доведення. Оскільки $T(B_{H_1})$ – передкомпакт, це сепарабельна множина, тобто $T(H_1)$ також сепарабельний. Замінивши, якщо потрібно, H_2 на замикання образу оператора T, можемо звести задачу до випадку, коли H_2 – сепарабельний простір. Якщо $\dim H_2 < \infty$, то сам оператор T буде скінченновимірним і питання вже розв'язане. Тобто залишається розглянути основний випадок, коли H_2 – нескінченновимірний сепарабельний простір. У цьому випадку в H_2 існує ортонормований базис $\{e_n\}_1^{\infty}$. Для передкомпакта $T(B_{H_1})$ в H_2 застосуємо Теорему 3 з попереднього розділу і знайдемо такий номер $n = n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 < \varepsilon^2$ для всіх $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in T(B_{H_1})$.
Тобто,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\widehat{Th}_k\right|^2 < \varepsilon^2$$

для всіх $h \in B_{H_1}$.

Позначимо P_n ортопроектор простору H_2 на $\mathrm{lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Покажемо, що у якості шуканого скінченновимірного оператора можна взяти $T_\varepsilon = P_n T$. По-перше, T_ε насправді скінченновимірний, бо його образ лежить в $\mathrm{lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Далі, для довільного $h \in B_{H_1}$ застосуємо формулу розкладу за ортонормованим базисом і формулу для ортопроектора:

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{Th}_k e_k, \quad T_\varepsilon h = P_n(Th) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{Th}_k e_k.$$

Відповідно, маємо оцінку

$$\|(T - T_\varepsilon)h\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{Th}_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \widehat{Th}_k \right|^2 < \varepsilon^2.$$

Тобто $\|T - T_\varepsilon\| = \sup\limits_{h \in B_{H_1}} \|(T - T_\varepsilon)h\| \leqslant \varepsilon$. □

Ця частина не входить до програми екзамену, але виконавши наведені вправи читач зрозуміє багато речей, що є корисними в застосуваннях.

Нагадаємо, що завдяки теоремі про загальний вигляд лінійного функціоналу в гільбертовому просторі, H_1^* ототожнюється з H_1, а H_2^* ототожнюється з H_2, тому в теорії гільбертових просторів спряжений оператор визначають як оператор T^*, що діє з H_2 в H_1 і задовольняє рівність $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для всіх $x \in H_1$, $y \in H_2$.

Нехай H_1, H_2 – сепарабельні гільбертові простори. Назвемо гільберт - шмідтовою нормою оператора $T \in L(H_1, H_2)$ величину

$$\|T\|_{\text{H-S}} = \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}} |\langle Te_n, g_m \rangle|^2 \right)^{1/2},$$

де $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$ – фіксована пара ортонормованих базисів гільбертових просторів H_1 і H_2 відповідно. Оператор назвемо гільберт-шмідтовим, якщо $\|T\|_{\text{H-S}} < \infty$.

Вправи. Доведіть, що:

21.1. $\|T\| \leqslant \|T\|_{\text{H-S}}$.

21.2. $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^* g_n\|^2\right)^{1/2} = \|T\|_{\text{H-S}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}$.

21.3. Гільберт-шмідтевість оператора і значення $\|T\|_{\text{H-S}}$ не залежать від вибору базисів $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$, і $\|T\|_{\text{H-S}} = \|T^*\|_{H-S}$.

21.4. Застосуйте попередню вправу для доведення такого факту: нехай U – фіксований еліпсоїд у скінченновимірному евклідовому просторі. Тоді всі прямокутні паралелепіпеди, описані навколо U, мають однакові діаметри. Зазначимо, що навіть в тривимірному випадку довести цей факт методами аналітичної геометрії зовсім непросто.

21.5. Кожен гільберт-шмідтовий оператор компактний. Доведіть це за допомогою наближення скінченновимірними операторами.

Нехай H – гільбертів простір. Оператор $T \in L(H)$ називається самоспряженим, якщо $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Наступна теорема подає нетривіальні приклади самоспряжених операторів.

Теорема. Для проектора $P \in L(H)$ такі умови еквівалентні:

(1) P – самоспряжений оператор;

(2) P – ортопроектор.

Доведення. Оскільки P – проектор, то простір H розкладається у пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$, де H_1 – ядро проектора, а H_2 – образ. Доведемо спочатку імплікацію (1)⇒(2), тобто, якщо P – самоспряжений оператор, то $H_1 \perp H_2$. Справді, нехай $h_1 \in H_1$ і $h_2 \in H_2$. Тоді

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle = \langle Ph_1, h_2\rangle = 0.$$

Доведемо тепер обернену імплікацію (2)⇒(1), тобто, якщо $H_1 \perp H_2$, то P – самоспряжений оператор. Для цього візьмемо елементи $x, y \in H$ і запишемо їхній розклад

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,$$

де $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Маємо

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle = \langle x, y_2\rangle = \langle x, Py\rangle . \qquad \square$$

Нехай T – самоспряжений оператор.

Білінійною формою оператора T називається функція

$$F(x, y) = \langle Tx, y\rangle.$$

Квадратичною формою оператора T називається функція

$$g(x) = \langle Tx, x\rangle.$$

Зазначимо, що

$$g(x) = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{g(x)},$$

тому квадратична форма самоспряженого оператора набуває тільки дійсні значення. Неважко перевірити, що

$$\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(g(x+y) - g(x-y)\right).$$

Аналогічно можна знайти й уявну частину форми $\langle Tx, y\rangle$, тобто білінійна форма однозначно визначається за квадратичною.

У свою чергу, білінійна форма однозначно визначає сам оператор (це нескладна, але корисна вправа: у разі, якщо для операторів T_1, T_2 квадратичні форми дорівнюють одна одній, то самі оператори також співпадають: $T_1 = T_2$).

Отже, всю інформацію про самоспряжений оператор можна одержати, знаючи властивості його квадратичної форми. Як приклад наведемо корисну формулу для норми самоспряженого оператора.

Теорема. Нехай T – самоспряжений оператор. Тоді

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x \rangle| . \tag{1}$$

Доведення. Введемо позначення $q = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x \rangle|$. Для будь-якого $z \in S_H$ справджується оцінка $|\langle Tz, z \rangle| \leqslant q \|z\|^2$. За однорідністю, ця оцінка зберігається і для будь-якого $z \in H$. Потрібно довести, що $\|T\| = q$. Маємо:

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} \|Tx\| \leqslant \sup_{x,y \in S_H} \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle$$

$$= \sup_{x,y \in S_H} \frac{1}{4} \left(\langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle \right)$$

$$\leqslant \sup_{x,y \in S_H} \frac{q}{4} \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \right) = \sup_{x,y \in S_H} \frac{2q}{4} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) = q,$$

тобто $\|T\| \leqslant q$.

Обернене співвідношення відразу випливає з нерівності Коші–Буняковського:

$$q = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \sup_{x \in S_H} \|Tx\| = \|T\|. \qquad \square$$

Вправи.

21.6. Чи може для ненульового оператора функція $g(x) = \langle Tx, x\rangle$ бути тотожним нулем? Чи зміниться відповідь, якщо розглядати гільбертові простори над полем дійсних чисел?

21.7. Перевірте, що добуток самоспряжених операторів є самоспряженим оператором тоді і тільки тоді, коли оператори комутують.

21.8. Як повинні бути пов'язані між собою підпростори $H_1, H_2 \subset H$, щоб ортопроектори P_1, P_2 на ці підпростори комутували?