Функціональний аналіз

Лекція 20

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Приклад оператора без власних векторів.

Оператор множення на незалежну змінну

$$T : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Tx)(t) = tx(t).$$

Вправи.

20.1. За якої умови на функцію $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ формула

$$(Tx)(t) = g(t)x(t)$$

задаватиме неперервний лінійний оператор $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$? Чому дорівнює норма цього оператора множення на функцію?

20.2. За якої умови на функцію $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ оператор з попередньої вправи матиме власні вектори?

20.3. Нехай $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ неперервна функція, що не є сталою. Чи може множина власних векторів оператора з вправи 20.1 бути повною системою?

Нехай X – метричний простір, $A, C \subset X$, $\varepsilon > 0$. Нагадаємо, що множина C називається ε-сіткою для A, якщо для будь-якого $a \in A$ існує $x \in C$ з $\rho(x, a) < \varepsilon$. Іншими словами, множина C є ε-сіткою для A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $a \in A$ $\rho(a, C) < \varepsilon$. Підмножина A метричного простору X називається передкомпактом, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ у A існує скінченна ε-сітка.

Нагадаємо очевидні властивості передкомпактів: якщо $A \supset B$ і A – передкомпакт, то і B – передкомпакт; об'єднання скінченного числа передкомпактів – передкомпакт. Кожен передкомпакт – обмежена множина, тобто міститься в деякій кулі скінченного радіуса (для цього досить навіть існування скінченної ε-сітки при деякому одному фіксованому значенні ε). Множина в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ є передкомпактом тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Так само, як і в довільному повному метричному просторі, для замкненої підмножини A гільбертового простору H такі умови еквівалентні:

- A – компактна множина;
- A – передкомпакт;
- з будь-якої послідовності елементів множини A можна виділити збіжну підпослідовність.

Також нагадаємо наступну зручну властивість:
Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина A має передкомпактну ε-сітку. Тоді A – передкомпакт.

Теорема 1.

(a) якщо A, B – передкомпакти в гільбертовому просторі, то $A + B$ – передкомпакт;

(b) якщо $A \subset H_1$ – передкомпакт, $T \in L(H_1, H_2)$, то $T(A)$ – передкомпакт в H_2;

(c) зокрема, передкомпактність зберігається при множенні на скаляр.

Доведення. (a) Нехай A_1, B_1 – скінченні $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки множин A і B відповідно. Тоді $A_1 + B_1$ – скінченна ε-сітка множини $A + B$.
(b) Якщо A_1 – скінченна $\frac{\varepsilon}{\|T\|}$-сітка множини A, то $T(A_1)$ – скінченна ε-сітка множини $T(A)$.
(c) Множення на фіксований скаляр – неперервний лінійний оператор. □

Теорема 2. Нехай A – обмежена підмножина в гільбертовому простору H і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний підпростір $Y \subset H$ який утворює ε-сітку для A. Тоді A – передкомпакт.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ Нехай підпростір $Y \subset H$ скінченновимірний і є ε-сіткою для A. Позначимо через r таке число, що $A \subset rB_H$. Розглянемо множину $(r+\varepsilon)B_Y$. Це обмежена підмножина скінченновимірного простору Y, отже, вона – передкомпакт. Оскільки Y – ε-сітка для A, для будь-якого $x \in A$ існує $y \in Y$ з $\|x-y\| < \varepsilon$. Але y лежить в $(r+\varepsilon)B_Y$:

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y-x\| < r + \varepsilon.$$

Отже, множина $(r+\varepsilon)B_Y$ – це теж ε-сітка для A. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми знайшли для A передкомпактну ε-сітку, що означає передкомпактність множини A. □

Теорема 3. Нехай H – гільбертів простір з ортонормованим базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset H$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 \leqslant \varepsilon$ для всіх $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$.

Доведення. Почнемо з достатності. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і оберемо відповідний номер $m = n(\varepsilon^2)$ з умов теореми. Щоб довести передкомпактність множини D скористуємося Теоремою 2. Позначимо $Y = \text{lin}\{e_k\}_{k=1}^m$. Y – це скінченновимірний простір. Доведемо, що Y – це ε-сітка для D. Візьмемо довільний елемент $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$. Тоді $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{x}_k e_k \in Y$ і

$$\rho(x, Y) \leqslant \|x - y\| = \left\| \sum_{k=m}^{\infty} \hat{x}_k e_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |\hat{x}_k|^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Тобто в один бік доведення завершене.
Тепер доведемо необхідність. Припустимо, що D – передкомпакт. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і оберемо скінчену δ-сітку $A \subset H$ для D з настільки малим $\delta > 0$, що $(3\delta)^2 < \varepsilon$. Для кожного n позначимо P_n ортопроектор простору H на $\mathrm{lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Оберемо таке $n \in \mathbb{N}$, щоб для кожного елемента a нашої скінченної множини A виконувалася умова

$$\|a - P_n a\| < \delta.$$

Покажемо, що це n і є тим $n(\varepsilon)$, яке ми маємо знайти.

Розглянемо довільний $x = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$ і оберемо той $a \in A$, що $\|x - a\| < \delta$. Тоді

$$\|x - P_n x\| \leqslant \|x - a\| + \|a - P_n a\| + \|P_n a - P_n x\|$$

$$\leqslant 2\|x - a\| + \|a - P_n a\| \leqslant 3\delta,$$

тобто $\sum_{k=n}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 = \|x - P_n x\|^2 \leqslant (3\delta)^2 < \varepsilon$. □

Вправи.

20.4. Для наступних множин в просторі ℓ_2 з'ясувати чи є вона компактом.

$$A_1 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \colon \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad 0 \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

(Множина A_1 має назву "цеглина Гільберта").

$$A_2 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \colon \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad 0 \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}.$$

20.5. Якщо для множини A в просторі ℓ_2 існує елемент $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, що мажорує A у тому сенсі, що $|x_k| \leqslant |y_k|$ для будь-якого $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ і всіх k, то A – передкомпакт.

20.6. Наведіть приклад передкомпакта A в просторі ℓ_2, який не задовольняє достатню умову передкомпактності з попередньої вправи.

Неперервний лінійний оператор називається скінченновимірним або оператором скінченного рангу, якщо його образ скінченновимірний.

Теорема 4. Нехай H_1, H_2 – гільбертові простори, $T \in L(H_1, H_2)$ – скінченновимірний оператор. Тоді існують дві скінчені підмножини $\{x_k\}_{k=1}^n \subset H_1$, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset H_2$, такі що дія оператора T на всі елементи h простору H_1 записується у вигляді

$$Th = \sum_{k=1}^{n} \langle h, x_k \rangle \, y_k. \tag{1}$$

Доведення. Оскільки за означенням скінченновимірного оператора підпростір $Y = T(H_1)$ – скінченновимірний, в Y існує ортонормований базис $\{y_k\}_{k=1}^n$. Введемо позначення $f_k(h) = \langle Th, y_k\rangle$. Очевидно, що ці f_k є неперервними лінійними функціоналами на H_1. Тому існують елементи $x_k \in H_1$ такі, що $f_k(h) = \langle h, x_k\rangle$ для всіх $h \in H_1$ (теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі). Розглянемо розклад елемента Th по ортонормованому базису $\{y_k\}_{k=1}^n$:

$$Th = \sum_{k=1}^n \langle Th, y_k\rangle\, y_k = \sum_{k=1}^n f_k(h)\, y_k = \sum_{k=1}^n \langle h, x_k\rangle\, y_k,$$

тобто (1) дійсно має місце. $\square$

Будь-який оператор вигляду (1) є скінченновимірним, бо його образ $T(H_1)$ міститься у скінченновимірному підпросторі – лінійній оболонці векторів $\{y_k\}_{k=1}^n$. Таким чином, теорема 4 надає загальний вигляд скінченновимірного оператора.

Оператор $T \in L(H_1, H_2)$ називається компактним, якщо образ $T(B_{H_1})$ одиничної кулі простору H_1 є передкомпактом у просторі H_2. Сім'я всіх компактних операторів, які діють з простору H_1 у простір H_2, позначається $K(H_1, H_2)$.

Приклад 1. Будь-який скінченновимірний оператор $T \in L(H_1, H_2)$ є компактним, тому що $T(B_{H_1})$ – це обмежена множина у скінченновимірному просторі $T(H_1)$, тобто є передкомпактом.

Приклад 2. Якщо простір H нескінченновимірний, то одиничний оператор в H – це не компактний оператор. Справді, $I(B_H) = B_H$, а одинична куля нескінченновимірного простору не є передкомпактом.

Теорема 5. Множина компактних операторів $K(H_1, H_2)$ має такі властивості:

(1) $K(H_1, H_2)$ – лінійний підпростір в $L(H_1, H_2)$.

(2) $K(H_1, H_2)$ – операторний ідеал, тобто якщо $T \in K(H_1, H_2)$, то добутки AT і TU компактні для будь-яких неперервних операторів A, U, для яких мають сенс відповідні композиції.

(3) Множина $K(H_1, H_2)$ замкнена в $L(H_1, H_2)$ в сенсі збіжності за нормою[1].

[1] Звертаємо увагу, що замкненості в сенсі поточкової збіжності тут немає.

Доведення. (1). Стійкість щодо множення на скаляр очевидна, а стійкість щодо додавання випливає зі співвідношення

$$(T_1 + T_2)(B_{H_1}) \subset T_1(B_{H_1}) + T_2(B_{H_1})$$

і того, що сума передкомпактів – передкомпакт.

(2) і (3). Не встигли, буде на наступній лекції. $\square$