# Функціональний аналіз

## Лекція 19

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

# Зміст лекції

Нехай $H$ – гільбертів простір, $\{e_k\}$ $k \in \Gamma \subset H$ – ортонормована система, $h \in H$ – довільний елемент, а $\hat{h}_n = \langle h, e_n \rangle$ – його коефіцієнти Фур'є.

Формула для ортопроектора. Позначимо $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_k\}_{k \in \Gamma}$, $P$ – ортопроектор на $X$. Тоді для будь-якого елемента $h \in H$

$$Ph = \sum_{k \in \Gamma} \hat{h}_k e_k.$$

Теорема. Нехай $H$ – гільбертів простір, $\{x_n\}_1^\infty \subset H$ – лінійно незалежна послідовність, $X_n = \text{Lin}\,\{x_k\}_1^n$. Тоді існує ортонормована система $\{e_n\}_1^\infty$, яка має таку властивість:

$$\text{Lin}\,\{e_k\}_1^n = X_n \text{ для всіх } n.$$

(Така ортонормована система $\{e_n\}_1^\infty$ називається ортогоналізацією за Грамом–Шмідтом системи $\{x_n\}_1^\infty$).

Доведення. Позначимо $P_n$ ортопроектор на $X_n$. Покладемо

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},\ e_2 = \frac{x_2 - P_1 x_2}{\|x_2 - P_1 x_2\|},\ \ldots,\ e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}, \ldots.$$

При такому означенні всі $e_k$ при $k \leqslant n$ лежать в $X_n$, а $e_{n+1}$ ортогональний до $X_n$. Тобто при кожному $n$ вектор $e_{n+1}$ ортогональний до всіх попередніх $e_k$. Крім того, норми всіх $e_k$ дорівнюють 1. Отже, $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормована система. За побудовою, $\text{Lin}\,\{e_k\}_1^n \subset X_n$ і вимірності цих просторів збігаються. Таким чином, $\text{Lin}\,\{e_k\}_1^n = X_n$. $\square$

Зауваження. Оскільки $\{e_k\}_1^n$ утворюють ортонормований базис в $X_n$, для будь-якого $h \in H$, $P_n h = \sum_{k=1}^n \hat{h}_k e_k$. Тобто $e_k$ можна будувати по $\{x_n\}_1^\infty$ явно, використовуючи рекурентну формулу

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\left\| x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k \right\|}.$$

Теорема. У будь-якому нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі існує ортонормований базис.

Доведення. У сепарабельному гільбертовому просторі $H$ існує зліченна щільна послідовність. Викинувши з цієї послідовності елементи, лінійно залежні з попередніми, отримаємо лінійно незалежну послідовність $\{x_n\}_1^\infty \subset H$, повну в $H$.

Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – ортогоналізація за Грамом–Шмідтом послідовності $\{x_n\}_1^\infty$. Тоді $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормована система,

$$\mathrm{Lin}\,\{e_k\}_1^\infty = \mathrm{Lin}\,\{x_k\}_1^\infty.$$

Тобто побудована система $\{e_n\}_1^\infty$ повна в $H$, що за означенням дає, що $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормований базис простору $H$. $\square$

Загальний (несепарабельний) випадок ми обґрунтували на минулій лекції за допомогою леми Цорна.

# Зауваження 1.

З доведення випливає, що в сепарабельному випадку ортонормований базис можна вибрати з додатковою умовою приналежності всіх його елементів до даного щільного лінійного підпростору. Тобто, в $L_2[0,1]$ існує такий ортонормований базис, що складається з поліномів; існує такий, що складається з тригонометричних поліномів; такий, що складається з кусково-сталих функцій, або ж з функцій, графіки яких – кусково-лінійчасті, тощо.

Також, якщо $X \subset H$ – щільний лінійний підпростір, $\{e_k\}_1^n \subset X$ – скінченна ортонормована система, то її можна доповнити до ортонормованого базису, який складається цілком з елементів множини $X$.

Нескінченну ортонормовану систему в щільному лінійному підпросторі $X$ не завжди можна доповнити до ортонормованого базису, не виходячи з $X$.

# Приклади.

1. Найкраще наближення в $L_2[0,1]$ поліномом першого степеня.

2. Метод найменших квадратів обробки експериментальних даних.

3. Мотивація застосування в задачах наближення $L_2$ - норми.

Вправи.

19.1. У доведенні теореми про ортогоналізацію ми зазначали, що вектор $e_{n+1}$ ортогональний до всіх попередніх $e_k$. Чому він ортогональний і до всіх наступних $e_k$?

19.2. Чому знаменник у рекурентній формулі

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}$$

не дорівнює нулю?

19.3. Нехай послідовність $(f_k)$ неперервно диференційовних функцій утворює ортонормовану систему в $L_2[0, 2\pi]$. Доведіть, що похідні функцій $(f_k)$ не можуть бути обмеженими в сукупності.

Нехай $H_1, H_2$ – гільбертові простори. Оператор $T\colon H_1 \to H_2$ називається ізоморфізмом гільбертових просторів, якщо $T$ лінійний, бієктивний і $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ для будь-яких $x, y \in H_1$. Гільбертові простори $H_1, H_2$ називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм гільбертових просторів $T\colon H_1 \to H_2$.

Теорема. Будь-який сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір $H$ ізоморфний простору $\ell_2$.

Доведення. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормований базис в $H$. Означимо оператор $T\colon H \to \ell_2$ формулою

$$Th = (\langle h, e_1\rangle, \langle h, e_2\rangle, ..., \langle h, e_n\rangle, ...).$$

Тобто елементу $h \in H$ ставимо у відповідність послідовність його коефіцієнтів Фур'є.

За нерівністю Бесселя, $Th \in \ell_2$ і $\|Th\| \leqslant \|h\|$. В оператора $T$ існує обернений – $T^{-1}$, який діє з $\ell_2$ в $H$ за правилом

$$T^{-1}(a_n)_1^\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Отже, оператор $T$ оборотний, тобто він бієктивний.
Залишилось перевірити рівність $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. Отож, нехай $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ і $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ – довільні елементи простору $H$. Маємо

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_k \bar{b}_j \langle e_k, e_j\rangle \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k = \langle Tx, Ty\rangle. \qquad \square$$

Вправи.

19.4. Кожний ізоморфізм $T$ гільбертових просторів $H_1, H_2$ є ізометрією: $\forall h \in H_1 \ \|Th\| = \|h\|$.

19.5. Кожна лінійна бієктивна ізометрія просторів $H_1, H_2$ є ізоморфізмом цих гільбертових просторів.