# Функціональний аналіз

## Лекція 18

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

# Зміст лекції

Критерій збіжності ортогонального ряду. Нехай $\{x_k\}_1^\infty$ – послідовність попарно ортогональних елементів гільбертового простору $H$. Тоді для збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty x_k$ необхідно і достатньо, щоб збігався числовий ряд $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2$.

Нехай $H$ – гільбертів простір, $\{e_n\}_1^\infty \subset H$ – ортонормована система, $h \in H$ – довільний елемент, а $\hat{h}_n = \langle h, e_n \rangle$ – його коефіцієнти Фур'є. Ряд $\sum_{n=1}^\infty \hat{h}_n e_n$ називається рядом Фур'є елемента $h$ за системою $\{e_n\}_1^\infty \subset H$.

Нерівність Бесселя. Нехай $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ – ортонормована система в гільбертовому просторі $H$, $h \in H$. Тоді $\sum_{k\in\Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2 \leqslant \|h\|^2$.

Вправа 16.13. Нехай $e_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$; $X = \overline{\operatorname{Lin}} \{e_k\}_1^\infty$. Тоді для того, щоб елемент $y \in H$ належав до $X^\perp$, необхідно і достатньо, щоб $y$ був ортогональний до всіх $e_k$. Іншими словами, $X^\perp = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k^\perp$.

**Теорема (формула для ортопроектора).** Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормована система в гільбертовому просторі $H$, $X = \overline{\mathrm{Lin}\,\{e_k\}_1^\infty}$ і $P$ – ортопроектор на підпростір $X$. Тоді ряд Фур'є будь-якого елемента $h \in H$ збігається і його сума дорівнює $Ph$:

$$Ph = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n.$$

Для скінчених ортонормованих систем $\{e_n\}_1^N \subset H$ формулою для ортопроектора на підпростір $\mathrm{Lin}\,\{e_k\}_1^N$ буде

$$Ph = \sum_{n=1}^{N} \hat{h}_n e_n.$$

Доведення. Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$ випливає з нерівності Бесселя і критерію збіжності ортогонального ряду. Далі, елемент $h$ можна зобразити у вигляді

$$h = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \right) + \left( h - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \right),$$

де, вочевидь, $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X$, а $h - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X^{\perp}$. За означенням ортопроектора, звідси випливає, що

$$Ph = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n.$$

□

Повна ортонормована система $\{e_n\}_1^\infty$ в гільбертовому просторі $H$ називається ортонормованим базисом. Іншими словами, $\{e_n\}_1^\infty$ утворюють ортонормований базис, якщо $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ для всіх $k, j \in \mathbb{N}$ і $\overline{\mathrm{Lin}} \{e_k\}_1^\infty = H$.

Якщо в умовах попередньої теореми $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормований базис, то $X = H$ і ортопроектор $P$ – це просто тотожний оператор. Звідси отримуємо такий результат.

Теорема. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ – ортонормований базис в просторі $H$. Тоді ряд Фур'є будь-якого елемента $h \in H$ збігається і $\sum_{n=1}^\infty \hat{h}_n e_n = h$. $\square$

**Теорема.** Нехай $H$ – гільбертів простір, $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$ – ряд Фур'є елемента $h \in H$. Такі умови еквівалентні:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n = h$;
- для елемента $h$ виконується рівність Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{h}_k|^2 = \|h\|^2 .$$

**Доведення.** На дошці. □

**Ортонормовані системи, що виникають в теорії ймовірностей та алгебрі.**

На дошці.