Функціональний аналіз

Лекція 17

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Підпростір Y лінійного простору X називається гіперпідпростором, якщо існує такий вектор $e \in X \setminus Y$, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$.

Теорема. Для підпростору Y лінійного простору X такі умови еквівалентні:

1. Y – гіперпідпростір в X.
2. $\dim X/Y = 1$.
3. Існує ненульовий лінійний функціонал f на X, для якого $\mathrm{Ker}\, f = Y$.

Доведення. $1. \Rightarrow 2.$ Нехай Y – гіперпідпростір в X, $e \in X \setminus Y$ – такий елемент, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Розглянемо $[e] \in X/Y$ – клас еквівалентності елемента e. $[e] \neq 0$, адже $e \notin Y$. Водночас $\mathrm{Lin}\,[e] = X/Y$, тобто в X/Y існує базис з одного елемента.

2. $\Rightarrow$ 3. Оскільки $\dim X/Y = 1$, існує ізоморфізм $U\colon X/Y \to \mathbb{K}$ нашого фактор-простору і поля скалярів. Означимо функціонал $f = U \circ q$, де q – фактор-відображення простору X на X/Y. Для цього функціонала $\operatorname{Ker} f = Y$.

3. $\Rightarrow$ 1. Нехай f – функціонал з п. 3. Виберемо елемент $e \in X$, для якого $f(e) = 1$. Очевидно, $e \in X \setminus Y$. Доведемо, що $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Для цього візьмемо довільний вектор $x \in X$ і зобразимо його у вигляді

$$x = f(x)e + (x - f(x)e).$$

У цьому запису другий доданок $x - f(x)e$ лежить в $\operatorname{Ker} f = Y$, тобто ми зобразили елемент x у вигляді $ae + y$, де a – скаляр, а $y \in Y$.

Вправи.

17.1. Нехай Y – гіперпідпростір в X. Довести, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$ для будь-якого вектора $e \in X \setminus Y$.

17.2. Нехай ядра двох лінійних функціоналів збігаються. Доведіть, що ці функціонали лінійно залежні.

17.3. В нормованому просторі ядро функціонала буде замкненим тоді і тільки тоді, коли функціонал неперервний.

17.4. Нехай X – нормований простір, $x \in X$, $f \in X^*$, a – довільний скаляр, $A = \{x \in X : f(x) = a\}$. Тоді $\rho(x, A) = \frac{|f(x)-a|}{\|f\|}$.

Теорема. Для будь-якого лінійного неперервного функціонала F, заданого на гільбертовому просторі H, існує такий елемент $h \in H$, що

$$F(x) = \langle x, h \rangle \tag{1}$$

для будь-якого $x \in H$. Такий елемент h визначений однозначно, і $\|F\| = \|h\|$.

Доведення. У випадку функціонала F, що тотожно дорівнює нулю, твердження очевидне. Нехай $F \neq 0$. Позначимо ядро функціонала F через X. Тоді існує елемент e одиничної норми, ортогональний до X. За шуканий елемент візьмемо $h = \overline{F(e)}e$. Рівність (1) виконується для будь-якого $x \in X$ і для $x = e$. Отже, $F(x) = \langle x, h \rangle$ для будь-якого $x \in \mathrm{Lin}\{e, X\}$. Але X – це гіперпідпростір в H, отже, $\mathrm{Lin}\{e, X\} = H$ і

$$F(x) = \langle x, h \rangle$$

на всьому просторі.

Рівність $\|F\| = \|h\|$ було доведено раніше. Залишилось перевірити єдиність елемента h. Нехай $h_1 \in H$ – такий елемент, що $F(x) = \langle x, h_1 \rangle$ для будь-якого $x \in H$. Тоді $\langle x, h - h_1 \rangle = 0$ для будь-якого $x \in H$, зокрема $\langle h - h_1, h - h_1 \rangle = 0$. Тобто $h - h_1 = 0$ і $h = h_1$. □

Зауваження 1. Міркування, використане в кінці доведення, можна подати окремим твердженням: якщо $\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle$ для всіх $x \in H$, то $h_1 = h_2$. В теорії гільбертових пространств цим твердженням зазвичай користуються без додаткових пояснень як очевидним.

Зауваження 2. Завдяки цій теоремі, спряжений простір H^* ототожнюється з самим простором H: кожному елементу $h \in H$ відповідає функціонал $\langle \cdot, h \rangle$, такий що діє на $x \in H$ за формулою $\langle x, h \rangle$. Зауважимо, що при такому ототожненні є тонкощі: хоча це ототожнення – це бієктивна ізомерія, і сумі елементів відповідає сума функціоналів, але при множенні елемента h на скаляр λ відповідний функціонал домножується не на λ, а на $\overline{\lambda}$: $\langle \cdot, \lambda h \rangle = \overline{\lambda} \langle \cdot, h \rangle$. Ототожнення H^* з H зазвичай записують як $H^* = H$. Треба пам'ятати у якому сенсі використовують це рівняння.

Вправи.

17.5. Чи важлива в доведеній теоремі повнота простору H?

17.6. Нехай числова послідовність $a = (a_1, a_2, \dots)$ має таку властивість: для будь-якого $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$ збігається. Тоді $a \in \ell_2$ і формула $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$ задає неперервний лінійний функціонал на ℓ_2.

За допомогою попередньої вправи наступна теорема зводиться до теореми про замкнений графік.
17.7. Нехай нескінченна матриця $A = (a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ має таку властивість: для будь-якого $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ і будь-якого $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m$ збігається, і числова послідовність $Ax = (\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m)_{n=1}^{\infty}$ належить до ℓ_2 (іншими словами, оператор множення на матрицю A відображає ℓ_2 в ℓ_2). Тоді оператор множення на матрицю A неперервний, як оператор, що відображає ℓ_2 в ℓ_2.

17.8. Спираючись на вправу 17.4, доведіть такий n-вимірний аналог відомої формули обчислення відстані від точки до площини. Нехай гіперплощина A в n-вимірному координатному просторі задана рівнянням $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$. Тоді відстань від будь-якого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ до гіперплощини A виражається формулою

$$\rho(x, A) = \frac{|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Теорема Піфагора для n доданків. Нехай елементи $\{x_k\}_1^n$ гільбертового простору H попарно ортогональні: $\langle x_k, x_j \rangle = 0$ при $k \neq j$. Тоді

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Доведення. Потрібно скористатись означенням норми, розкрити дужки і викреслити нульові доданки:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle + \sum_{k,j=1,\, k\neq j}^{n} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \qquad \square$$

Критерій збіжності ортогонального ряду. Нехай $\{x_k\}_1^\infty$ – послідовність попарно ортогональних елементів гільбертового простору H. Тоді для збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty x_k$ необхідно і достатньо, щоб збігався числовий ряд $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2$.

Доведення. За критерієм Коші, для збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty x_k$ необхідно і достатньо, щоб

$$\left\|\sum_{k=n}^m x_k\right\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Ця умова з огляду на доведену лему еквівалентна умові

$$\sum_{k=n}^m \|x_k\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

що, знову ж таки за критерієм Коші, рівносильно збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2.$$

□

Зауваження. Якщо ряд попарно ортогональних доданків $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається, то простим граничним переходом при $n \to \infty$ з формули $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$ отримуємо рівність

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2,$$

тобто теорему Піфагора для зліченної кількості доданків. $\square$

У цій темі для простоти викладу через Γ позначатиметься скінченна або зліченна множина індексів. Проте виклад буде побудовано так, щоб читач без великих труднощів міг поширити основні твердження і на випадок незліченного Γ.

Система $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ елементів гільбертового простору H називається ортонормованою системою, якщо x_k попарно ортогональні і норми всіх x_k дорівнюють 1. Ці дві умови можуть бути записані разом формулою $\langle x_k, x_j\rangle = \delta_{k,j}$, де $\delta_{k,j}$ – це символ Кронекера.

Коефіцієнтами Фур'є елемента $h \in H$ за ортонормованою системою $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ називаються числа $\hat{h}_k = \langle h, x_k\rangle$, $k \in \Gamma$.

Наступне твердження прояснює значення коефіцієнтів Фур'є.

Твердження 1. Нехай $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ – ортонормована система, $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ – скаляри і $h = \sum_{k\in\Gamma} a_k x_k$ (якщо в останній сумі нескінченне число ненульових доданків, то суму розуміємо як ряд, записаний в деякому фіксованому порядку). Тоді $a_k = \hat{h}_k$ при всіх $k \in \Gamma$.

Доведення. Помножимо скалярно обидві частини рівності $h = \sum_{k\in\Gamma} a_k x_k$ на елемент x_j. Одержимо $\left\langle h, x_j \right\rangle = \sum\limits_{k\in\Gamma} a_k \left\langle x_k, x_j \right\rangle$. Згадаємо, що $\left\langle x_k, x_j \right\rangle = \delta_{k,j}$, тобто вся сума в правій частині останньої рівності складається з одного доданка a_j, отримуємо потрібну рівність $a_j = \left\langle h, x_j \right\rangle$. □

Твердження 2. Нехай $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ – ортонормована система елементів гільбертового простору H, підпростір X – це замикання лінійної оболонки множини $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$, $h \in H$. Для того, щоб елемент $h_0 \in X$ був найближчим в X до h, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти Фур'є елемента h_0 за системою $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ збігалися з відповідними коефіцієнтами Фур'є елемента h.

Доведення. h_0 – найближчий в X елемент до h тоді і тільки тоді, коли $h - h_0 \in X^\perp$. Оскільки $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{x_k\}_{k\in\Gamma}$, то умова $h - h_0 \in X^\perp$ еквівалентна одночасному виконанню рівностей $\langle h - h_0, x_k\rangle = 0$ при всіх $k \in \Gamma$, що, в свою чергу, означає потрібну рівність $\langle h_0, x_k\rangle = \langle h, x_k\rangle$, $k \in \Gamma$. □

Теорема (нерівність Бесселя). Нехай $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ – ортонормована система в гільбертовому просторі H, $h \in H$. Тоді $\sum_{k\in\Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2 \leqslant \|h\|^2$.

Доведення. Нерівність Бесселя достатньо довести для скінченних ортонормованих систем: якщо $\sum_{k\in\Delta} \left|\hat{h}_k\right|^2 \leqslant \|h\|^2$ для будь-якої скінченної підмножини $\Delta \subset \Gamma$, то і сума по всьому Γ оцінюється тим самим числом.

Нехай множина Γ скінченна. Розглянемо елемент $x = \sum_{k\in\Gamma} \hat{h}_k x_k$. Згідно з твердженням 1, $\hat{x}_k = \hat{h}_k$. За твердженням 2, x – це найближчий в підпросторі $X = \mathrm{Lin}\,\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ елемент до h, тому, $(h-x)\perp x$ і $\|x\|^2 + \|h-x\|^2 = \|h\|^2$. Отже,

$$\sum_{k\in\Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2 = \|x\|^2 \leqslant \|h\|^2 . \qquad \square$$

Вправи.

Нехай Γ – деяка, можливо незліченна множина індексів. За означенням, ряд $\sum_{k\in\Gamma} x_k$ елементів банахового простору безумовно збігається до елемента x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така скінченна підмножина $\Delta \subset \Gamma$, що для будь-якої скінченної підмножини $\Delta_1 \subset \Gamma$, якщо $\Delta_1 \supset \Delta$, то

$$\left\| x - \sum_{k\in\Delta_1} x_k \right\| < \varepsilon.$$

(По суті, тут йде мова про збіжність частинних сум за деякою напрямленістю).

Нехай ряд $\sum_{k\in\Gamma} x_k$ елементів банахового простору безумовно збігається до елемента x. Тоді:

17.8. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ кількість доданків, за нормою більших ніж ε, скінченна.
17.9. Кількість ненульових доданків ряду не більш ніж злічення.
17.10. Якщо всі ненульові доданки цього ряду виписати у довільний спосіб в послідовність $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, то отриманий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ збігається до елемента x в звичайному розумінні.
17.11. Перевірте, що якщо під збіжністю ряду незліченного числа доданків розуміти безумовну збіжність, то твердження про ортогональні ряди і ортонормовані системи, доведені в останніх двох пунктах, зберігають силу і для незліченних систем і рядів.