Функціональний аналіз

Лекція 16

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Теорема про найкраще наближення. Нехай H – гільбертів простір, $A \subset H$ – непорожня опукла замкнена множина. Тоді для будь-якого елемента h простору H в A існує єдиний найближчий до h елемент. Інший словами, існує єдиний елемент $a_0 \in A$, для якого

$$\|h - a_0\| = \rho(h, A).$$

Доведення. Оскільки $\rho(h, A) = \rho(0, A - h)$, теорему достатньо довести для випадку $h = 0$. Позначимо $\rho(0, A)$ через r і розглянемо множини

$$A_n = \left\{a \in A : \|a\| \leqslant r + \frac{1}{n}\right\} = A \cap \left(r + \frac{1}{n}\right)\bar{B}_H.$$

Перетин усіх A_n – це множина елементів, які розташовані на відстані r від нуля. Тобто нам потрібно довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ складається з однієї точки. Для цього скористаємось принципом вкладених множин.

Множини A_n утворюють спадний ланцюжок опуклих замкнених множин. Залишилось довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$. Для оцінки діаметра візьмемо дві довільні точки $x, y \in A_n$ та застосуємо рівність паралелограма і нерівність

$$r \leqslant \|e\| \leqslant r + \frac{1}{n},$$

яка справджується для будь-якого $e \in A_n$:

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2$$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\right)$$

$$\leqslant 2\left((r+1/n)^2 + (r+1/n)^2 - 2r^2\right).$$

Отже, $\operatorname{diam} A_n \leqslant \left(4(r+1/n)^2 - 4r^2\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Вправи.

16.1. У просторі $C[0,1]$ розглянемо функціонал F, який діє за правилом $F(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^1 x(t)dt$.
Тоді $A = \{x \in C[0,1] : F(x) = 1\}$ – опукла замкнена множина, яка не містить найближчого до нуля елемента.

16.2. У просторі $C[0,1]$ розглянемо множину A всіх функцій, які набувають в нулі значення 1. Перевірте, що відстань від A до 0 дорівнює 1, що ця відстань досягається, але найближча до нуля точка в A не єдина.

16.3. Для нормованого простору X такі властивості еквівалентні:

- в будь-якій опуклій підмножині $A \subset X$ для будь-якої точки $x \in X$, якщо в A є найближчий до x елемент, то цей елемент єдиний;
- для будь-яких двох неколінеарних векторів $x, y \in X$ виконується строга нерівність трикутника: $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$;
- $\|x + y\| < 2$ для будь-яких двох різних векторів $x, y \in S_X$;
- одинична сфера простору не містить прямолінійних відрізків ненульової довжини (остання властивість простору називається строгою опуклістю).

Непорожня підмножина A нормованого простору X називається чебишовською, якщо для неї має місце твердження теореми про найкраще наближення: для будь-якого елемента h простору X в A існує єдиний найближчий до h елемент.

16.4. Кожна чебишовська підмножина в нормованому просторі замкнена.

16.5. Кожна чебишовська підмножина скінченновимірного гільбертового простору є опуклою.

16.6. Чи розповсюджується твердження попередньої вправи на нескінченновимірні гільбертові простори?

Якщо Вам вдасться знайти відповідь – публікуйте! На сьогодні ця задача залишалається нерозв'язаною.

Теорема. Нехай H – простір зі скалярним добутком, $h \in H$. Задамо відображення $F\colon H \to \mathbb{C}$ формулою $F(x) = \langle x, h\rangle$. Тоді F – неперервний лінійний функціонал і $\|F\| = \|h\|$.

Доведення. Лінійність функціонала F – це аксіома (3) скалярного добутку. Неперервність функціонала і нерівність $\|F\| \leqslant \|h\|$ випливають з нерівності Коші-Буняковського. Потрібно тільки переписати цю нерівність у вигляді

$$|F(x)| = |\langle x, h\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|h\| \,.$$

Для оцінки ж норми функціонала F знизу підставимо в F вектор $\frac{h}{\|h\|} \in S_H$:

$$\|F\| \geqslant \left| F\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| = \left|\frac{\langle h, h\rangle}{\|h\|}\right| = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \,.$$

Теорему доведено. □

Нехай H – гільбертів простір. Елемент $h \in H$ називають ортогональним до підмножини $X \subset H$ (скорочений запис $h \perp X$), якщо h ортогональний до всіх елементів підмножини. Множина всіх елементів, ортогональних до підмножини X, називається ортогональним доповненням до X і позначається $X^\perp$.

Твердження 1. $X^\perp$ – підпростір в H (нагадаємо, що в гільбертовому просторі, згідно з прийнятою нами домовленістю, термін підпростір без додаткових епітетів означає замкнений лінійний підпростір).

Доведення. $X^\perp = \bigcap_{x \in X} x^\perp$. Тому достатньо довести, що для будь-якого елемента x множина $x^\perp$ – це замкнений лінійний підпростір в H. Але $x^\perp$ збігається з ядром $F^{-1}(0)$ неперервного лінійного функціонала $F\colon y \mapsto \langle y, x \rangle$. □

Наступне твердження каже: щоб знайти в підпросторі найближчий елемент до точки, потрібно опустити перпендикуляр на підпростір.

Твердження 2. Нехай X – підпростір гільбертового простору H, $h \in H$, $h_0 \in X$. Тоді такі умови еквівалентні:

(a) h_0 – найближчий в X елемент до h;

(b) $h - h_0 \in X^{\perp}$.

Доведення. $(a) \Rightarrow (b)$. Припустимо, що (b) не виконується. Тоді в X існує елемент x, для якого $\langle x, h - h_0 \rangle \neq 0$. Домноживши за необхідності x на сталу, отримаємо вектор, для якого $\langle x, h - h_0 \rangle = 1$. Згідно умови (a), для будь-якого $t > 0$

$$\|h - h_0\|^2 \leqslant \|h - h_0 - tx\|^2 = \|h - h_0\|^2 - 2t + t^2 \|x\|^2 .$$

Тобто при будь-якому $t > 0$ маємо $t^2 \|x\|^2 - 2t \geqslant 0$, що очевидно не виконується при $t = \|x\|^{-2}$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Розглянемо довільний елемент $h_1 \in X$. Маємо

$$\|h - h_1\|^2 = \|(h - h_0) - (h_1 - h_0)\|^2$$

$$= \|h - h_0\|^2 + \|h_1 - h_0\|^2 \geqslant \|h - h_0\|^2 .$$

Тобто h_0 – найближчий в X елемент до h, що й потрібно було довести. $\square$

Теорема. Нехай X – підпростір гільбертового простору H. Тоді H розпадається в пряму суму підпросторів X і $X^{\perp}$, тобто

$$H = X \oplus X^{\perp}.$$

Доведення. Нам потрібно довести, що 1) $X \cap X^{\perp} = \{0\}$, і 2) для будь-якого $h \in H$ існують такі $x \in X$ і $y \in X^{\perp}$, що $h = x + y$.

1) Нехай деякий елемент x належить водночас до підпросторів X і $X^{\perp}$. Тоді $x \perp x$, тобто $\langle x, x \rangle = 0$, і, відтак, $x = 0$.

2) Нехай $h \in H$ – довільний елемент. Позначимо через x найближчий до h елемент підпростору X і покладемо $y = h - x$. Тоді $x \in X$, $y \in X^{\perp}$ (за твердженням 2) і $h = x + y$. $\square$

Оскільки $H = X \oplus X^{\perp}$, існує обмежений проектор P на підпростір X з $\mathrm{Ker} P = X^{\perp}$. Дію цього проектора можна безпосередньо описати у такий спосіб: для будь-якого $h \in H$ запишемо зображення $h = x + y$, де $x \in X$, $y \in X^{\perp}$. Тоді $Ph = x$. Такий проектор P називається ортопроектором на підпростір X.

Зауваження. Як ми щойно довели, в гільбертовому просторі існує обмежений проектор на будь-який підпростір. Відома й обернена теорема Лінденштраусса-Цафрірі: якщо в банаховому просторі X будь-який підпростір доповнюваний, то X ізоморфний до гільбертового простору.

Вправи.

16.7. Ортопроектор на підпростір $X \subset H$ ставить у відповідність кожному елементу $h \in H$ найближчий до h елемент підпростору X.

16.8. Норма ортопроектора на ненульовий підпростір дорівнює одиниці.

16.9. Якщо деякий проектор P на підпростір X гільбертового простору має $\|P\| = 1$, то це – ортопроектор.

16.10. Доведіть, що ортогональне доповнення до підмножини – це замкнений лінійний підпростір, спираючись безпосередньо на означення.

16.11. Нехай X – підпростір гільбертового простору H. Тоді $(X^{\perp})^{\perp} = X$.

16.12. Для довільної множини $X \subset H$ правильне таке твердження: $(X^{\perp})^{\perp}$ збігається із замиканням лінійної оболонки множини X.

16.13. Нехай $e_k \in H$, $k = 1, 2, ...$; $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_k\}_1^{\infty}$. Тоді для того, щоб елемент $y \in H$ належав до $X^{\perp}$, необхідно і достатньо, щоб y був ортогональний до всіх e_k. Іншими словами, $X^{\perp} = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} e_k^{\perp}$.