Функціональний аналіз

Лекція 15

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Скалярний добуток

Нерівність Коші-Буняковського

Норма, що породжена скалярним добутком

Рівність паралелограма

Нехай X – комплексний лінійний простір. Функція $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, яка ставить кожній парі x, y елементів простору X у відповідність комплексне число, називається скалярним добутком, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

(1) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ для будь-якого $x \in X$ (додатність);

(2) якщо $\langle x, x \rangle = 0$, то $x = 0$ (невиродженість);

(3) $\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a \langle x_1, y \rangle + b \langle x_2, y \rangle$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ і $a, b \in \mathbb{C}$ (лінійність за першою змінною);

(4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ для будь-яких $x, y \in X$ (ермітова симетричність).

Зазначимо, що з третьої і четвертої аксіом випливають правила розкриття дужок за другою змінною:

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle; \ \langle x, ay \rangle = \bar{a} \langle x, y \rangle.$$

Елементи x, y, для яких $\langle x, y \rangle = 0$, називаються ортогональними між собою (скорочений запис: $x \perp y$).

Приклади

I. Скалярний добуток в $\mathbb{C}^n$: нехай $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Покладемо $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$.

II. Скалярний добуток в ℓ_2: для будь-яких $x, y \in \ell_2$, $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, ..., y_n, ...)$ покладемо $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$.

III. Скалярний добуток в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$: $\forall f, g \in L_2$ означимо скалярний добуток формулою $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f\, \bar{g}\, d\mu$.

Хоча в усіх перелічених просторах існують, природно, й інші скалярні добутки, надалі, якщо не обумовлено протилежне, під скалярними добутками в $\mathbb{C}^n$, ℓ_2 і L_2 ми матимемо на увазі саме описані вище приклади.

Вправи.

15.1. Спираючись на нерівність $|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$ $(a, b \in \mathbb{C})$, доведіть збіжність ряду й існування інтеграла в означених скалярних добутках в ℓ_2 і $L_2\,[0, 1]$ відповідно.

15.2. Перевірте виконання аксіом скалярного добутку в усіх наведених вище прикладах скалярних добутків.

Формула квадрата суми

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\,.$$

Нерівність Коші-Буняковського. Нехай X – простір зі скалярним добутком. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ виконується така нерівність:

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} .$$

Доведення. На підставі аксіоми додатності для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ маємо $\langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0$.
Розкривши дужки отримаємо, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$\langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geqslant 0.$$

Квадратичний поліном з дійсними коефіцієнтами може бути невід'ємним на всій осі, тільки якщо його дискримінант не перевищує нуля. Тобто ми довели, що для будь-яких $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} .$$

Щоб звідси одержати потрібну нерівність Коші-Буняковського, зазначимо, що

$$|\langle x, y\rangle| = \mathrm{Re}\left\langle x, e^{i\arg<x,y>}y\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle x, x\rangle^{1/2}\left\langle e^{i\arg<x,y>}y, e^{i\arg<x,y>}y\right\rangle^{1/2} = \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Теорему доведено. □

Вправи.

15.3. Нехай для деяких елементів x, y простору зі скалярним добутком нерівність Коші-Буняковського перетворюється в рівність: $|\langle x, y\rangle| = \langle x, x\rangle^{1/2}\ \langle y, y\rangle^{1/2}$. Тоді ці елементи лінійно залежні.

15.4. Спираючись на приклади II і III скалярних добутків, виведіть такі варіанти нерівності Коші-Буняковського:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{і}$$

$$\left|\int_{\Omega} f\, g\, d\mu\right| \leqslant \left(\int_{\Omega} |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g|^2\, d\mu\right)^{1/2}.$$

15.5. Нехай функція F двох змінних на лінійному просторі X задовольняє всі аксіоми скалярного добутку, за винятком аксіоми невиродженості. Перевірте, що і в цьому випадку виконується нерівність Коші-Буняковського

$$|F(x,y)| \leqslant F(x,x)^{1/2} F(y,y)^{1/2}.$$

15.6. Нехай функція F двох змінних на лінійному просторі $\mathbb{R}^2$ задовольняє всі аксіоми дійсного скалярного добутку. Доведіть, що множина

$$\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,x) = 1 \right\}$$

– це еліпс з центром в нулі. Навпаки, для кожного еліпса з центром в нулі існує скалярний добуток, який породжує еліпс у вищезгаданому сенсі.

Нехай H – простір зі скалярним добутком. Величина

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

називається нормою, породженою скалярним добутком.

Використовуючи введене позначення, нерівність Коші-Буняковського можна переписати у вигляді

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

а формула квадрата суми може бути записана як

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle + \|y\|^2 .$$

Перевіримо на дошці виконання аксіом норми для норми, породженої скалярним добутком.

Простір зі скалярним добутком за замовченням розглядається як нормований простір з нормою, яка породжена скалярним добутком.

Теорема. Для будь-яких x, y – елементів простору зі скалярним добутком виконується рівність паралелограма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

(Доведення і коментарі – на дошці).

Теорема про граничний перехід під знаком скалярного добутку. Нехай x_n, x, y_n і y – елементи простору зі скалярним добутком H, $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тоді $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ $(n \to \infty)$.

(Доведення на дошці). $\square$

Простір зі скалярним добутком H називається

гільбертовим простором,

якщо він повний в нормі, породженій скалярним добутком.

В теорії гільбертового простору підпросторами називаються замкнені лінійні підпростори. На підпросторі гільбертового простору визначено той самий скалярний добуток, що й на всьому просторі. У цьому скалярному добутку підпростір гільбертового простору сам є гільбертовим простором.

Вправи.

15.7. Перевірте, що введені нами раніше норми просторів ℓ_2 і L_2 породжені відповідними скалярними добутками.

15.8. Перевірте, що в банахових просторах $C\,[0,1]$, $L_1\,[0,1]$, c_0 і ℓ_1 рівність паралелограма не виконується.

15.9. Доведіть, що якщо для будь-яких елементів x, y нормованого простору X виконується рівність паралелограма, то норма простору X породжується деяким скалярним добутком.