Функціональний аналіз

Лекція 13

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай X, Y – банахові простори, $T \in L(X, Y)$. За означенням, оператор T здійснює відкрите відображення, якщо образ $T(A)$ будь-якої відкритої множини $A \subset X$ – відкрита множина в Y.

Оператори, які здійснюють відкрите відображення, називають ще відкритими операторами.

Зазначимо елементарні властивості відкритих операторів.

- Відкритий оператор сюр'єктивний. Справді, повний образ $T(X)$ оператора відкритий в Y і утворює лінійний підпростір. Отже, $T(X)$ містить лінійну оболонку деякої кулі в Y, тобто $T(X) = Y$.
- Якщо відкритий оператор ін'єктивний, то він бієктивний, і T^{-1} – неперервний оператор. (Одразу випливає з означення неперервності через прообрази відкритих множин).

Критерій відкритості оператора. Оператор $T \in L(X, Y)$ здійснює відкрите відображення тоді і тільки тоді, коли образ $T(B_X)$ одиничної кулі містить деяку кулю вигляду rB_Y, $r > 0$.

Доведення. Необхідність умови випливає з того, що образ $T(B_X)$ одиничної кулі під дією відкритого відображення – відкрита множина, яка містить нульовий елемент простору Y.
Перевіримо достатність. Нехай $A \subset X$ – довільна відкрита підмножина, $x_0 \in A$. Виберемо $t > 0$ у такий спосіб, щоб куля $B_X(x_0, t) = x_0 + tB_X$ також містилась в A. Тоді

$$T(A) \supset Tx_0 + tT(B_X) \supset Tx_0 + trB_Y,$$

тобто будь-яка точка Tx_0 множини $T(A)$ входить туди разом з деяким околом. Отже, $T(A)$ відкрита, що, з огляду на довільність вибору множини A, спричиняє відкритість оператора T.
□

Вправа.

13.1. Нехай X – нормований простір, X_1 – замкнений підпростір в X. Тоді фактор-відображення $q\colon X \to X/X_1$, $q(x) = [x]$ – відкритий оператор.

Підмножина A банахового простору X називається кулеподібною, якщо для будь-якої послідовності $x_n \in A$ і будь-яких скалярів λ_n, які задовольняють умову $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leqslant 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ збігається до елемента множини A.

Властивості кулеподібних множин (обговорення на дошці).

1. Кулеподібні множини обмежені.
2. Кожна замкнена опукла обмежена врівноважена множина в банаховому просторі кулеподібна.
3. Відкрита одинична куля банахового простору – кулеподібна множина. Отже, кулеподібна множина може бути незамкнена.
4. Образ кулеподібної множини під дією неперервного лінійного оператора – знову кулеподібна множина.

Теорема 1. Нехай замикання $\bar{A}$ кулеподібної множини A в банаховому просторі X містить кулю rB_X, де r – деяке додатне число. Тоді сама множина A містить цю кулю.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r = 1$ (до цього випадку можна звести заміною множини A на $\frac{1}{r}A$). Зафіксуємо $x \in B_X$ і доведемо, що $x \in A$. Задамо додатне число ε, яке задовольняє умову $\frac{1}{1-\varepsilon}x \in B_X$, і покладемо $x_0 = \frac{1}{1-\varepsilon}x$. За умовою, $x_0 \in \bar{A}$. Виберемо $y_0 \in A$, яке наближає x_0 з точністю до ε: $\|x_0 - y_0\| < \varepsilon$. Вектор $x_1 = x_0 - y_0$ лежить в εB_X, що, в свою чергу, міститься в $\varepsilon\bar{A}$. Виберемо $y_1 \in A$ у такий спосіб, що $\|x_1 - \varepsilon y_1\| < \varepsilon^2$. Тоді елемент

$$x_2 = x_1 - \varepsilon y_1 = x_0 - y_0 - \varepsilon y_1$$

лежить в $\varepsilon^2\bar{A}$.

Продовжуючи цей процес, побудуємо такі вектори $y_n \in A$, що $\|x_0 - y_0 - \varepsilon y_1 - ... - \varepsilon^n y_n\| < \varepsilon^{n+1}$. За такої побудови ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n$ збігається до x_0. Отже, з огляду на кулеподібність множини A елемент

$$x = (1 - \varepsilon)x_0 = \sum_0^{\infty} (1 - \varepsilon)\varepsilon^n y_n$$

лежить в A, що і потрібно було довести. □

Теорема Банаха про відкрите відображення. Нехай X, Y – банахові простори, $T \in L(X, Y)$ – сюр'єктивний оператор. Тоді T здійснює відкрите відображення.

Доведення. Введемо до розгляду множину $A = T(B_X)$. Згідно з критерієм відкритості відображення, достатньо довести, що A містить деяку кулю вигляду rB_Y, $r > 0$. Оскільки A – кулеподібна множина, то на підставі теореми 1 достатньо довести, що замикання $\bar{A}$ множини A містить кулю вигляду rB_Y. У цьому допоможе теорема Бера.
Скористаємось сюр'єктивністю оператора T і запишемо простір Y у вигляді

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

За теоремою Бера, отримуємо, що A не може бути ніде не щільною в Y, тобто $\bar{A}$ містить деяку кулю вигляду $y_0 + rB_Y$. Звідси на підставі опуклості і симетричності множини $\bar{A}$ виводимо, що

$$\bar{A} \supset \frac{1}{2}(\bar{A} - \bar{A}) \supset \frac{1}{2}((y_0 + rB_Y) - (y_0 + rB_Y)) \supset rB_Y.$$

Теорему доведено. □

Нехай X, Y – нормовані простори. Лінійний оператор $T: X \to Y$ називається ізоморфізмом, якщо він неперервний, бієктивний і обернений до нього оператор $T^{-1}: Y \to X$ також неперервний. Нормовані простори X і Y називаються ізоморфними (позначення: $X \approx Y$), якщо існує ізоморфізм $T: X \to Y$ цих просторів.

Частковий випадок ізоморфізму – ізометрія – розглядався вище. Як випливає з означення, ізоморфізм зберігає всі топологічні структури: він переводить відкриті множини у відкриті, замкнені – в замкнені, збіжні послідовності і напрямленості – у збіжні. Наступна теорема подає ще один приклад структури, що зберігається при ізоморфізмі.

Теорема 2. Нехай X, Y – ізоморфні нормовані простори й X повний. Тоді Y – теж повний простір.

Доведення. За умовою, існує ізоморфізм $T \colon X \to Y$. Для доведення повноти простору Y розглянемо довільну послідовність Коші $y_n \in Y$. Покладемо $x_n = T^{-1} y_n$. З огляду на неперервність оператора T^{-1} вектори x_n також утворюють послідовність Коші:

$$\|x_n - x_m\| = \left\| T^{-1}(y_n - y_m) \right\| \leqslant \left\| T^{-1} \right\| \cdot \|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Оскільки X – повний простір, послідовність (x_n) має границю. Позначимо цю границю через x. За неперервністю оператора T,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Тобто послідовність y_n має границю. □

Теорема 3. Нехай X, Y – скінченновимірні нормовані простори і $\dim X = \dim Y$. Тоді $X \approx Y$.

Доведення. На підставі рівності вимірностей існує бієктивний лінійний оператор $T\colon X \to Y$. Оскільки кожний лінійний оператор на скінченновимірному просторі неперервний, неперервні й оператори T і T^{-1}, тобто T – ізоморфізм. □

Наслідок. Кожний скінченновимірний нормований простір повний. Кожний скінченновимірний підпростір будь-якого нормованого простору замкнений.

Більша частина згадуваних нами нескінченновимірних просторів попарно не ізоморфні. Так, серед всіх просторів $L_p[0,1]$ і ℓ_q при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ є тільки дві пари ізоморфних: $L_2[0,1] \approx \ell_2$ (цей факт буде обґрунтовано пізніше) і $L_\infty[0,1] \approx \ell_\infty$ (доведення цієї теореми А. Пелчиньського, так само, як і згаданих вище фактів про неізоморфність, входять в вибірковий курс "Теорія банахових просторів".

Дві норми $\| \, \|_1$ і $\| \, \|_2$ на лінійному просторі X називаються **еквівалентними** (позначення – $\| \, \|_1 \sim \| \, \|_2$), якщо існують такі дві сталі $C_1, C_2 > 0$, що

$$C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1$$

для всіх $x \in X$.

Теорема 4. Для норм $\| \, \|_1$ і $\| \, \|_2$ на лінійному просторі X такі умови рівносильні:

(1) $\| \, \|_1 \sim \| \, \|_2$;

(2) тотожний оператор I на X, що розглядається як оператор, який діє з нормованого простору $(X, \| \, \|_1)$ в нормований простір $(X, \| \, \|_2)$, є ізоморфізмом;

(3) норми $\| \, \|_1$ і $\| \, \|_2$ задають ту саму топологію на X.

Доведення. Пропоную довести самостійно. Доведення є у підручнику. □

Наслідок. Нехай X – скінченновимірний лінійний простір. Тоді всі норми на X еквівалентні.

Вправи.

13.2. На будь-якій множині нормованих просторів відношення $\approx$ ізоморфізму – це відношення еквівалентності.
13.3. Нехай X, Y – нормовані простори. Якщо оператор $T: X \to Y$ – ізоморфізм, то і спряжений оператор $T^*: Y^* \to X^*$ – ізоморфізм.
13.4. На будь-якому нескінченновимірному лінійному просторі існують нееквівалентні між собою норми.

Теорема Банаха про обернений оператор. Нехай X, Y – банахові простори, $T \in L(X, Y)$ – бієктивний оператор. Тоді оператор T^{-1} неперервний, тобто T – ізоморфізм.

Доведення. Оскільки T, зокрема, сюр'єктивний, T здійснює відкрите відображення. Як ми вже зазначали, якщо відкритий оператор бієктивний, то T^{-1} – неперервний оператор. □

Теорема про обернений оператор допускає таке корисне переформулювання: нехай X, Y – банахові простори, $T \in L(X, Y)$. Припустимо, що для будь-якої правої частини $b \in Y$ рівняння $Tx = b$ має розв'язок, і цей розв'язок єдиний. Тоді розв'язок неперервно залежить від правої частини. Іншими словами, має місце стійкість розв'язку щодо малих збурень правої частини.