Функціональний аналіз

Лекція 12

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай X, Y – нормовані простори. Сім'я $G \subset L(X, Y)$ неперервних лінійних операторів називається поточково обмеженою, якщо для будь-якого $x \in X$

$$\sup_{T \in G} \|Tx\| < \infty.$$

Сім'я G називається рівномірно обмеженою, якщо

$$\sup_{T \in G} \|T\| < \infty.$$

Принцип рівномірної обмеженості (S.Banach, H.Steinhaus). Поточково обмежена сім'я неперервних лінійних операторів, які діють з банахового простору X в нормований простір Y, обмежена рівномірно.

Теорема Банаха-Штейнгауза. Поточково збіжна послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$, які діють з банахового простору X у нормований простір Y, рівномірно обмежена.

Критерій поточкової збіжності. Якщо рівномірно обмежена послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ з нормованого простору X у нормований простір Y збігається поточково на щільній підмножині $A \subset X$ до оператора $T \in L(X, Y)$, то $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ поточково на всьому X.

Доведення. Позначимо $M = \sup_n \|T_n - T\|$. Зафіксуємо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Нехай $a \in A$ наближає x з точністю до ε: $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$. Маємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)x\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)(x - a)\| + \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)a\| =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)(x - a)\| \leqslant M\varepsilon.$$

Через довільність ε отримуємо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)x\| = 0,$$

тобто $T_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$. $\square$

Вправи.

12.1. Наведіть приклад поточково обмеженої послідовності неперервних функцій на відрізку [0,1], збіжної до нуля на щільній підмножині, але не збіжної до нуля на всьому відрізку.
12.2. Нехай X, Y – метричні простори, A – щільна підмножина в X, $f_n, f\colon X \to Y$ – функції, що задовольняють умову Ліпшиця зі спільною сталою C. Тоді з поточкової збіжності на A послідовності (f_n) до f випливає поточкова збіжність на всьому X.
12.3. Нехай послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ збігається поточково на підмножині $A \subset X$ до оператора $T \in L(X, Y)$. Тоді T_n збігається до T на $\operatorname{Lin} A$.

Зауваження. З огляду на останню вправу, вимога щільності, що накладається на множину A у доведеному вище критерії поточкової збіжності, може бути послабленою: достатньо, щоб $\operatorname{Lin} A$ була щільною множиною.

12.4. Доведіть щільність множини кусково-сталих функцій в $L_1[-\pi, \pi]$, використовуючи таку схему міркувань: по-перше, $C[-\pi, \pi]$ щільний в $L_1[-\pi, \pi]$ (цей факт нам вже відомий із курсу теорії міри). Далі, кожну неперервну функцію можна наблизити в метриці $L_1[-\pi, \pi]$ (і навіть рівномірно) кусково-сталими функціями.

Теорема 1. Нехай (g_n) – рівномірно обмежена на $[a,b]$ послідовність вимірних функцій, яка задовольняє таку умову: $\int_\Delta g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для будь-якого відрізка $\Delta \subset [a,b]$. Тоді

$$\int_{[a,b]} f(t)g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

для будь-якої функції $f \in L_1[a,b]$.

Доведення. Нехай $M = \sup_{n,t} |g_n(t)| < \infty$. Задамо лінійні функціонали F_n на $L_1[a,b]$ за правилом $F_n(f) = \int_{[a,b]} f(t)g_n(t)dt$. Згідно з нерівністю

$$|F_n(f)| \leqslant M \int\limits_{[a,b]} |f(t)|\, dt = M\,\|f\|$$

функціонали F_n неперервні і $\|F_n\| \leqslant M$.

За умовою, функціонали F_n збігаються до 0 на будь-якій функції вигляду $\mathbb{1}_\Delta$. Отже, послідовність (F_n) збігається до 0 і на будь-якій кусково-сталій функції. Оскільки множина кусково-сталих функцій щільна в $L_1[a, b]$, для завершення доведення залишається застосувати критерій поточкової збіжності. □

Для функції $f \in L_1[-\pi, \pi]$ означимо коефіцієнти Фур'є $\hat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ формулою $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$.

Наслідок. Для будь-якої інтегровної функції f на $[a, b]$ інтеграли вигляду $\int_a^b f(t) e^{i\alpha t} dt$, $\int_a^b f(t) \sin \alpha t \, dt$ або $\int_a^b f(t) \cos \alpha t \, dt$ прямують до нуля при $\alpha \to \pm\infty$. Зокрема, прямують до нуля коефіцієнти Фур'є будь-якої функції $f \in L_1[-\pi, \pi]$.

Позначимо через $C(\mathbb{T})$ підпростір простору $C[-\pi,\pi]$, який складається з функцій g, що задовольняють умову $g(-\pi)=g(\pi)$. Кожну функцію $f \in C(\mathbb{T})$ можна продовжити з відрізка $[-\pi,\pi]$ на всю вісь як 2π-періодичну неперервну функцію. Відповідно, елементи простору $C(\mathbb{T})$ будемо вважати неперервними 2π-періодичними функціями, визначеними на всій осі. Через $S_n f$ позначимо частинну суму ряду Фур'є:

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Для повноти викладу нагадаємо формулу, напевно відому читачеві з курсу аналізу:

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{\sin(n+1/2)\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau} d\tau. \tag{1}$$

Щоб вивести це співвідношення, підставимо в означення частинних сум $S_n g$ формулу для коефіцієнтів Фур'є:

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)} dx.$$

Провівши заміну змінних $\tau = x - t$ і скориставшись тим, що інтеграл від 2π-періодичної функції на будь-якому відрізку довжини 2π збігається з інтегралом по $[-\pi, \pi]$, отримуємо:

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}} d\tau.$$

Для одержання формули (1) залишається поділити чисельник і знаменник підінтегрального виразу на $e^{i\tau/2}$ і скористатись формулою $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$.

Як відомо з курсу аналізу, ряд Фур'є $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{int}$ неперервно диференційовної функції f рівномірно збігається до цієї функції. Водночас, якщо відмовитись від умови диференційовності, таке твердження буде неправильним. Більше того, існують неперервні функції, для яких ряд Фур'є не збігається поточково. Наступна теорема показує, як можна довести існування подібних прикладів, не конструюючи їх явним способом. Таке міркування є особливо корисним, коли явна побудова і обґрунтування прикладу поєднані зі значними труднощами.

Теорема 2. Існує функція $g \in C(\mathbb{T})$, для якої значення $(S_n g)(0)$ частинних сум ряду Фур'є в нулі утворюють необмежену послідовність.

Доведення. Задамо лінійні функціонали G_n на $C(\mathbb{T})$ за правилом $G_n(g) = (S_n g)(0)$. Нам потрібно довести, що G_n не утворюють поточково обмеженої послідовності функціоналів. На підставі принципу рівномірної обмеженості для цього достатньо встановити, що функціонали G_n неперервні, але їх норми необмежені в сукупності. З (1) маємо

$$G_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Відповідно, функціонали G_n – це функціонали інтегрування з вагою. Вони неперервні і

$$\|G_n\| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt.$$

Оцінимо ці норми знизу:

$$\|G_n\| \geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\right| dt \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\right| dt$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n+1/2}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}}|\sin(n+1/2)t|\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\sin\tau|\, d\tau = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)}.$$

Отже, $\|G_n\| \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$ $\square$

Теорема Діні. Нехай функція f інтегровна за Лебегом на відрізку $[-\pi,\pi]$ і задовольняє умову Діні в точці $x_0 \in [-\pi,\pi]$: $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in L_1[-\pi,\pi]$. Тоді ряд Фур'є функції f збігається в точці x_0 до $f(x_0)$.

Доведення. Позначимо $f(x_0) = a$. Маємо

$$(S_n f)(x_0) - a = (S_n(f-a))(x_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+t) - a) \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Застосувавши теорему 1 до $g_n(t) = \sin(n+1/2)t$, отримуємо потрібну умову $(S_n f)(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. □