Функціональний аналіз

Лекція 11

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Поточкова збіжність операторів

Повнота простору операторів і спряженого простору

Принцип рівномірної обмеженості.

Теорема 1. Нехай X, Y – нормовані простори, $T_n\colon X \to Y$ – лінійні оператори і для будь-якого $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Тоді відображення $T\colon X \to Y$, задане рівністю $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, – лінійний оператор.

Доведення.

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(ax_1 + bx_2) =$$

$$= a\lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + b\lim_{n\to\infty} T_n(x_2) = aT(x_1) + bT(x_2). \qquad \square$$

Означення. Послідовність лінійних операторів $T_n \colon X \to Y$ називається поточково збіжною до оператора $T \colon X \to Y$, , якщо $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ для всіх $x \in X$.

Теорема 2. Нехай послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ поточково збігається до оператора $T \colon X \to Y$ і $\sup_n \|T_n\| = C < \infty$. Тоді $T \in L(X, Y)$ і $\|T\| \leqslant C$.

Доведення. Для будь-якого $x \in X$ маємо оцінку:

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant C\|x\|. \qquad \square$$

Теорема 3. Якщо послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ збігається до оператора T за нормою простору $L(X, Y)$, то вона збігається до T і поточково.

Доведення.

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи.

11.1. Нехай $X = C[0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ і оператори $T_n \in L(X,Y)$ діють за правилом $T_n(f) = f(0) - f(1/n)$. Обчисліть норми операторів T_n.

11.2. З поточкової збіжності не випливає збіжність за нормою. Приклад: послідовність операторів із попередньої вправи прямує до 0 поточково, проте не прямує за нормою.

11.3. Відомий загальний факт (Josefson-Nissenzweig): на будь-якому нескінченновимірному нормованому просторі існує послідовність неперервних лінійних функціоналів, збіжна до 0 поточково, але не збіжна за нормою. Наведіть такі приклади у всіх відомих Вам нескінченновимірних нормованих просторах.

11.4. В умовах теореми 2 доведіть, що $\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. Іншими словами, норма на $L(X,Y)$ напівнеперервна знизу щодо поточкової збіжності.

Теорема. Нехай X – нормований, а Y – банахів простір. Тоді $L(X, Y)$ – банахів простір.

Доведення. Спиратимося на означення. Нехай оператори $T_n \in L(X, Y)$ утворюють фундаментальну послідовність: $\|T_n - T_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Тоді в кожній точці $x \in X$ значення операторів лежать у повному просторі Y і утворюють послідовність Коші:

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Отже, для будь-якого $x \in X$ існує границя послідовності $(T_n x)$. Означимо оператор $T\colon X \to Y$ рівністю $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. За теоремою 1, оператор T лінійний. Оскільки кожна фундаментальна послідовність обмежена, то, за теоремою 2 $T \in L(X, Y)$. Нам залишилось перевірити, що $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ в нормі простору $L(X, Y)$.

З огляду на фундаментальність послідовності T_n для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що $\|T_N - T_M\| < \varepsilon$ для будь-яких $M > N > N(\varepsilon)$. Тоді для будь-якої точки $x \in S_X$ одиничної сфери при $M > N > N(\varepsilon)$ також виконується оцінка $\|T_N x - T_M x\| < \varepsilon$. Переходячи в останній нерівності до границі при $M \to \infty$, отримаємо, що $\|T_N x - Tx\| \leqslant \varepsilon$. Якщо в лівій частині цієї нерівності взяти супремум по $x \in S_X$, ми одержимо, що $\|T_N - T\| \leqslant \varepsilon$ при $N > N(\varepsilon)$. Тобто $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, що й потрібно було довести. $\square$

Наслідок. Нехай X – нормований простір. Тоді X^* – банахів простір.

Наслідок. L_p та ℓ_p з $1 < p \leqslant \infty$ – банахові простори.

Нехай X, Y – нормовані простори. Сім'я $G \subset L(X, Y)$ неперервних лінійних операторів називається поточково обмеженою, якщо для будь-якого $x \in X$

$$\sup_{T \in G} \|Tx\| < \infty.$$

Сім'я G називається рівномірно обмеженою, якщо

$$\sup_{T \in G} \|T\| < \infty.$$

Принцип рівномірної обмеженості (S.Banach, H.Steinhaus). Поточково обмежена сім'я неперервних лінійних операторів, які діють з банахового простору X в нормований простір Y, обмежена рівномірно.

Доведення. Нехай $G \subset L(X, Y)$ – поточково обмежена сім'я. Для будь-якого $x \in X$ введемо позначення $M_x = \sup_{T \in G} \|Tx\|$. Розглянемо множини $A_n = \{x \in X : \ M_x \leqslant n\}$. Ці множини замкнені і в об'єднанні дають весь простір X. Отже, за теоремою Бера, принаймні одна з множин A_n не є ніде не щільною і, отже, містить деяку кулю. Тобто існують номер $n \in \mathbb{N}$ і така куля вигляду $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$, що для будь-якого $x \in x_0 + rB_X$ при всіх $T \in G$ виконується нерівність $\|Tx\| \leqslant n$. Тоді для будь-яких $x \in B_X$, $T \in G$ виконується оцінка

$$\|Tx\| = \left\| \frac{1}{r} T(x_0 + rx) - Tx_0 \right\| \leqslant \frac{1}{r} n + n.$$

Взявши в останній нерівності супремум по $x \in B_X$, отримаємо, що $\|T\| \leqslant \frac{1}{r} n + n$ для будь-якого $T \in G$. Цим доведено потрібну рівномірну обмеженість сім'ї G. □

Теорема Банаха-Штейнгауза. Поточково збіжна послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$, які діють з банахового простору X у нормований простір Y, рівномірно обмежена.

Доведення. Оскільки поточково збіжна послідовність є водночас поточково обмеженою, теорема безпосередньо випливає з принципу рівномірної обмеженості.

Приклади, які ілюструють важливість умов в теоремі Банаха-Штейнгауза. (На дошці).

https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach

https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_boundedness_principle

https://en.wikipedia.org/wiki/Hugo_Steinhaus