Функціональний аналіз

Лекція 10

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Теорема Ріса про некомпактність.
Одинична куля нескінченновимірного нормованого простору не може бути передкомпактом.

Доведення. Припустимо, що B_X – передкомпакт. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,1)$ та оберемо якусь скінченну ε-сітку A для B_X. Тоді $Y := \operatorname{lin} A \subset X$ – скінченновимірний підпростір, який також буде ε-сіткою для B_X. Оскільки $Y \neq X$, фактор-простір X/Y нетривіальний. Виберемо елемент $[x]$ простору X/Y, який задовольняє умову $\varepsilon < \|[x]\| < 1$. За означенням норми у фактор-просторі, існує представник $z \in [x]$ з $\|z\| < 1$. Тоді $z \in B_X$, але водночас

$$\inf_{y \in Y} \|z - y\| = \|[z]\| = \|[x]\| > \varepsilon,$$

тобто Y не є ε-сіткою для B_X. Протиріччя. $\square$

Вправи.

10.1. В усіх відомих Вам нескінченновимірних нормованих просторах знайдіть конкретні обмежені послідовності, такі що не мають збіжних підпослідовностей.

Банаховим простором називається повний нормований простір, тобто нормований простір, де кожна послідовність Коші збігається. Банахові простори – це найважливіший клас нормованих просторів: саме ці простори найчастіше зустрічаються в застосуваннях, і саме навколо поняття банахового простору згруповані найважливіші результати функціонального аналізу[1].

Вправа.

10.2. Доведіть, спираючись на теорему Бера, що нескінченновимірний банаховий простір не може мати зліченного базису Гамеля.

[1] Принаймні так вважає автор цих рядків, який спеціалізується в теорії банахових просторів.

Нехай (x_n) – послідовність елементів нормованого простору X. Частинними сумами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ називаються вектори $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Якщо частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігаються до елемента x, ряд називається збіжним, а елемент x називається сумою ряду. Рівність $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ – це загальноприйнятий скорочений запис виразу «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається і його сума дорівнює x».

Випишемо на дошці елементарні властивості рядів в нормованому просторі, аналогічні тим, що були в курсі математичного аналізу.

Твердження 1 (критерій Коші збіжності ряду). Для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів банахового простору X збігався, необхідно і достатньо, щоб $\left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

Доведення. Збіжність ряду еквівалентна збіжності послідовності s_n частинних сум. У свою чергу, в повному просторі збіжність послідовності рівносильна її фундаментальності. Залишається зауважити, що $s_m - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k$. $\square$

Твердження 2. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів банахового простору X абсолютно збігається. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – збіжний ряд.

Доведення. Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ збігається, $\sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Отже,

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Для завершення доведення скористаємось твердженням 1. □

Твердження 3. Нехай X – неповний нормований простір. Тоді в X існує абсолютно збіжний, але при цьому розбіжний ряд.

Доведення. На підставі неповноти простору існує фундаментальна послідовність $v_n \in X$, яка не має границі. За означенням послідовності Коші, $\|v_n - v_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Отже, існує таке $n_1 \in \mathbb{N}$, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2}$ для всіх $n, m \geqslant n_1$. Аналогічно виберемо таке $n_2 > n_1$, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{4}$ для всіх $n, m \geqslant n_2$. Продовжуючи міркування, отримаємо таку зростаючу послідовність індексів n_j, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2^j}$ для всіх $n, m \geqslant n_j$.

Тоді для підпослідовності v_{n_j} маємо

$$\|v_{n_2} - v_{n_1}\| < \frac{1}{2},\ \|v_{n_3} - v_{n_2}\| < \frac{1}{4}, \ldots, \|v_{n_{j+1}} - v_{n_j}\| < \frac{1}{2^j}, \ldots.$$

Задамо потрібний ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ у такий спосіб: $x_1 = v_{n_1}$, $x_2 = v_{n_2} - v_{n_1}, \ldots, x_j = v_{n_j} - v_{n_{j-1}}$ і т. д. Побудований ряд абсолютно збігається:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \|x_j\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 1.$$

Водночас його частинні суми дорівнюють v_{n_j}, тобто утворюють розбіжну послідовність. □

Твердження 2 і 3 разом дають таку характеризацію повних нормованих просторів.

Теорема. Для повноти нормованого простору X необхідно і достатньо, щоб кожний абсолютно збіжний ряд в X збігався.

Лема. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функцій з $L_1 = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ абсолютно збігається за нормою цього простору. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f і

$$\|f\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|.$$

Доведення. За означенням норми в L_1, абсолютна збіжність означає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty$. За теоремою Леві, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції g і

$$\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu.$$

Позначимо через A множину міри 0, за межами якої ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ збігається. У кожній точці $t \in \Omega \setminus A$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ збігається абсолютно до деякого числа $f(t)$. Отже, ми означили на $\Omega \setminus A$ (тобто майже скрізь на Ω) функцію f, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається до f у всіх точках множини $\Omega \setminus A$. Доозначимо на A функцію f нулем.

Функція f вимірна на $\Omega\backslash A$ як поточкова границя послідовності вимірних функцій, і функція g є інтегровною мажорантою f. Отже, f інтегровна й

$$\int\limits_\Omega |f| d\mu \leqslant \int\limits_\Omega g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega |f_n| d\mu. \qquad \square$$

Теорема. Простір L_1 банахів.
Доведення. Скористаємось критерієм повноти в термінах абсолютної збіжності. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функцій з L_1 абсолютно збігається. За попередньою лемою, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f. Доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається до f за нормою простору L_1. Справді,

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n \right\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Теорема. Нехай X – банахів простір, Y – замкнений підпростір в X. Тоді фактор-простір X/Y – також банахів простір.

Доведення. Нехай $x_n \in X$ такі, що $\sum_n \|[x_n]\| < \infty$. Згідно з критерієм повноти, потрібно довести, що ряд $\sum_n [x_n]$ збігається до деякого елемента фактор-простору. Для цього в кожному класі $[x_n]$ виберемо по такому представнику y_n, що $\|y_n\| \leqslant \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$. Тоді $\sum_n y_n$ – абсолютно збіжний ряд в X, що з огляду на повноту простору означає, що $\sum_n y_n$ збігається в X до деякого елемента x. Перевіримо, що $\sum [x_n] = [x]$.

$$\left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k] \right\| = \left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [y_k] \right\| = \left\| \left[x - \sum_{k=1}^{n} y_k \right] \right\|$$

$$\leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи.

10.3. Доведіть повноту простору L_p.

Повноту простору L_p буде доведено з непрямих міркувань. Тим не менше, читачеві буде корисно спробувати знайти пряме доведення цього факту.