Функціональний аналіз

Лекція 9

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Відокремлення опуклих множин – приклади

Дуальна формула для норми елемента. Вкладення простору в бідуальний.

Спряжений оператор

Істотність деяких з умов, які накладаються на множини A і B в формулюванні теореми Гана-Банаха в геометричній формі, та її наслідків очевидна. Так, множини не можна розділити гіперплощиною, якщо вони перетинаються. Якщо за одну з множин взяти коло, а за другу – центр цього кола, то стає зрозуміло, чому теорема неправильна для неопуклих множин. Водночас важливість топологічних умов, що накладаються, – відкритість, замкненість, компактність деяких з цих множин – вже не настільки очевидна. Нижче наводяться приклади, які демонструють значення таких умов.

Приклад 1. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ множини

$$A = \{(x,y) : y \leqslant 0\} \text{ і } B = \left\{(x,y) : x > 0, y \geqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

Ці множини замкнені, не перетинаються, але строго відокремити їх прямою, щоб жодна з множин із цією прямою не перетиналась, неможливо. Нагадаємо, що за умови компактності однієї з множин (наслідок 3 попередньої лекції) строге відокремлення можливе.

Приклад 2. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ множини

$$A = \{(x,0) : x \geqslant 0\} \text{ і } B = \{(x,y) : y < 0\} \cup \{(x,0) : x < 0\}.$$

Це – неперетинні опуклі множини, одна з яких замкнена. Водночас їх не можна строго розділити прямою: єдина пряма, від якої ці множини лежать (нестрого) по різні боки, – це вісь абсцис, але обидві ці множини перетинаються з віссю.

Нарешті, наведемо приклад опуклих неперетинних множин, для яких не існує навіть нестрогого відокремлення гіперплощиною. Такий приклад можливий тільки в нескінченновимірному просторі.

Приклад 3. Розглянемо лінійний простір $\mathcal{P}$ всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами. За A візьмемо множину всіх поліномів, які мають строго від'ємний старший коефіцієнт, а за B – множину всіх поліномів, у яких усі коефіцієнти невід'ємні. Ці множини опуклі і не перетинаються. Доведемо, що для будь-якого ненульового лінійного функціонала f на $\mathcal{P}$ не існує такого скаляра $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) \leqslant \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$.

Спочатку зазначимо, що одночлени $p_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, утворюють базис Гамеля в $\mathcal{P}$. Відповідно, функціонал f однозначно визначається своїми значеннями на p_n. Введемо позначення $f(p_n) = f_n$.

Припустимо, що $f(a) \leqslant \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$. Тоді, зокрема, оскільки $0 \in B$, можемо зробити висновок, що $0 = f(0) \geqslant \theta$, тобто $\theta \leqslant 0$. Далі, для будь-якого $\varepsilon < 0$ маємо $\varepsilon p_0 \in A$ і $\varepsilon f_0 = f(\varepsilon p_0) \leqslant \theta$. Спрямувавши ε до 0, одержуємо, що $\theta \geqslant 0$, тобто $\theta = 0$. Далі, кожний з поліномів p_n лежить в B, відповідно, $f_n = f(p_n) \geqslant 0$. З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо $p_n - \varepsilon p_{n+1} \in A$. Відповідно,

$$f_n - \varepsilon f_{n+1} = f(p_n - \varepsilon p_{n+1}) \leqslant 0,$$

звідси, спрямувавши ε до 0, отримуємо, що $f_n \leqslant 0$. Отже, всі f_n дорівнюють 0, і, тому $f = 0$.

Вправи.

9.1. Нехай на площині задано N опуклих замкнених множин, будь-які 3 з яких перетинаються. Тоді всі N множин мають спільну точку (E. Helly, 1936).

9.2. Нехай на площині задано нескінченну сім'ю опуклих замкнених множин, одна з яких обмежена, і будь-які 3 множини з цієї сім'ї перетинаються. Тоді вся сім'я має непорожній перетин.

9.3. Наведіть приклад, який показує істотність умови обмеженості у формулюванні попереднього твердження.

9.4. Придумайте і доведіть варіант теореми Геллі для множин в n-вимірному просторі.

Теорема 1. Для будь-якого елемента e нормованого простору E виконується дуальна формула для норми

$$\|e\| = \sup_{f \in S_{E^*}} |f(e)| .$$

Доведення. Для будь-якого $f \in S_{E^*}$ маємо $|f(e)| \leqslant \|f\| \cdot \|e\| = \|e\|$, відповідно, $\sup_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \leqslant \|e\|$. Для отримання оберненої оцінки скористаємось існуванням опорного в точці e функціонала f_0. За означенням опорного функціонала, $f_0 \in S_{E^*}$ і $f_0(e) = \|e\|$. Маємо $\sup\limits_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \geqslant |f_0(e)| = \|e\|$. □

Вкладення простору в бідуальний. Рефлексивність.

(На дошці)

Нехай X, E – нормовані простори, $T \in L(X, E)$. Спряженим оператором до оператора T називається оператор $T^*\colon E^* \to X^*$, який ставить у відповідність кожному функціоналу $f \in E^*$ функціонал $T^*f = f \circ T$. Іншими словами, функціонал $T^*f \in X^*$ діє за правилом $(T^*f)(x) = f(Tx)$.

Теорема 2. Оператор T^* неперервний, і $\|T^*\| = \|T\|$.

Доведення.

$$\|T^*\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \|T^*f\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \sup_{x \in S_X} |(T^*f)(x)|$$

$$= \sup_{x \in S_X} \sup_{f \in S_{E^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| = \|T\|. \qquad \square$$

Теорема 3. Образи і ядра операторів T і T^* пов'язані такими співвідношеннями:

(1) $\operatorname{Ker} T^* = (T(X))^{\perp}$;

(2) $T^*(E^*) \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

Доведення. (1)

$$(f \in \operatorname{Ker} T^*) \Leftrightarrow (T^* f = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in X : (T^* f)x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X : f(Tx) = 0) \Leftrightarrow (f \in (T(X))^{\perp}).$$

(2) Нехай $g \in T^*(E^*)$, тобто $g = T^* f$ для деякого $f \in E^*$. Тоді для будь-якого $x \in \operatorname{Ker} T$ маємо

$$g(x) = (T^* f)(x) = f(Tx) = 0,$$

тобто $g \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. □

Наслідок 1. Для того, щоб оператор T^* був ін'єктивним, необхідно і достатньо, щоб оператор T мав щільний образ. Зокрема, якщо оператор T сюр'єктивний, то T^* ін'єктивний.

Доведення. Нагадаємо, що $T(X)$ щільний тоді і тільки тоді, коли $T(X)^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Наслідок 2. Якщо оператор T^* сюр'єктивний, то T ін'єктивний.

Доведення. Якщо $T^*(E^*) = X^*$, то $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = X^*$, тобто $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. $\square$

Вправи.

9.5. Нехай X, Y, Z – нормовані простори, $T_1 \in L(X, Y)$, $T_2 \in L(Y, Z)$. Тоді $(T_2 T_1)^* = T_1^* T_2^*$.

9.6. Наведіть приклад, де $T^*(E^*) \neq (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$.