

Функціональний аналіз

Лекція 8

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021



Зміст лекції

Декілька лем про опуклі множини

Теореми про відокремлюваність опуклих множин

У цій темі X – дійсний нормований простір, A і B – непорожні підмножини простору X . Відповідно, усі лінійні функціонали дійсні.

Ми рухаємося у напрямку результатів, які можна розглядати як узагальнення такого геометричного твердження: нехай A і B – неперетинні опуклі множини на площині. Тоді можна провести таку пряму ℓ , що A і B опиняться по різні боки від ℓ . Тіла у тривимірному просторі вже потрібно відокремлювати не прямою, а площиною. У випадку великих вимірностей (в тому числі і в нескінченновимірному просторі), роль прямої або площини, що відділяє, бере на себе гіперплощина – лінія рівня лінійного функціонала.

Лема 1.

1. Якщо A – відкрита множина, то для будь-якого $b \in X$ множина $A + b$ також відкрита; якщо A – окіл точки $x \in X$, то $A + b$ – окіл точки $x + b$.
2. Якщо $\lambda \neq 0$, A – окіл точки $x \in X$, то λA – окіл точки λx .

Доведення.

1. Відображення паралельного перенесення $x \mapsto x + b$ бієктивне і зберігає відстані між елементами. Отже, при паралельному перенесенні кулі переходять у кулі (того ж радіуса) і відкриті множини – у відкриті множини.
2. Відображення гомотетії $x \mapsto \lambda x$ бієктивне і множить відстані між елементами на коефіцієнт $|\lambda|$. Тому кулі переходять у кулі, взагалі кажучи, іншого радіуса. $\square$

Лема 2. Якщо $A \subset X$ – відкрита множина, $B \subset X$, то $A + B$ також відкрита.

Доведення. $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b)$, тобто $A + B$ зображується у вигляді об'єднання відкритих множин. $\square$

Лема 3. Якщо A і B опуклі, то $A + B$ також опукла.

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in A + B$, $\lambda \in [0, 1]$. За означенням суми двох множин, існують такі $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, що $x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$. Відповідно, маємо

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) =$$

$$= (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in A + B. \quad \square$$

Лема 4. Нехай A опукла, $a_1, a_2 \in A$, $\lambda \in (0, 1)$ і a_1 – внутрішня точка множини A . Тоді й опукла комбінація $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ є внутрішньою точкою множини A .

Доведення. Множина A – окіл точки a_1 . За лемою 1, λA – окіл точки λa_1 , і $\lambda A + (1 - \lambda)a_2$ – окіл точки $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$. Водночас на підставі опуклості множини A

$$\lambda A + (1 - \lambda)a_2 \subset \lambda A + (1 - \lambda)A \subset A.$$

Отже, ми знайшли окіл точки $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$, який увесь лежить в A . □

Наслідок 1. Внутрішність опуклої множини A опукла.

Доведення. Достатньо застосувати лему 4 до випадку, коли обидві точки a_1, a_2 внутрішні. □



Наслідок 2. Якщо внутрішність $\overset{\circ}{A}$ опуклої множини A непорожня, то $\overset{\circ}{A}$ щільна в A .

Доведення. Нехай a – довільна точка множини A . Зафіксуємо $x \in \overset{\circ}{A}$. За лемою 4, увесь відрізок $\lambda a + (1 - \lambda)x$: $\lambda \in (0, 1)$ складається з внутрішніх точок. Оскільки $\lambda a + (1 - \lambda)x \rightarrow a$ при $\lambda \rightarrow 1$, одержуємо, що точка a належить до замикання множини $\overset{\circ}{A}$. $\square$

Лема 5. Нехай лінійний функціонал f на X не тотожний нулеві, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \subset X$ – множина з непорожньою внутрішністю і $f(a) \leq \theta$ для всіх $a \in A$. Тоді для всіх $x \in \overset{\circ}{A}$ виконується строга нерівність $f(x) < \theta$. Зокрема, якщо A відкрита, то $f(x) < \theta$ при всіх $x \in A$.

Доведення. За умовою, існує $e \in X$ з $f(e) > 0$. Нехай $x \in A$ – внутрішня точка. Виберемо настільки мале $\varepsilon > 0$, щоб точка $x + \varepsilon e$ потрапила в A . Маємо

$$f(x) < f(x) + \varepsilon f(e) = f(x + \varepsilon e) \leq \theta. \quad \square$$

Зазначимо, що в лемі 5 функціонал міг бути розривним, а умову відкритості множини B в останній частині формулювання можна замінити загальнішими алгебраїчними умовами: для будь-якого $x \in A$ множина $A - x$ – поглинаюча.

Головна лема. Нехай A – відкрита опукла підмножина нормованого простору X , $x_0 \in X \setminus A$. Тоді існує такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$, що $f(a) \leq f(x_0)$ на всіх $a \in A$.

Доведення. Достатньо довести лему за додаткового припущення, що A містить нульовий елемент простору. Загальний випадок зводиться до цього часткового паралельним перенесенням. А саме, нехай $a_0 \in A$. Розглянемо додаткову множину $B = A - a_0$. B – опукла відкрита множина, яка містить 0 ; $x_0 - a_0 \notin B$. Якщо частковий випадок правильний, існує такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$, що $f(b) \leq f(x_0 - a_0)$ для всіх $b \in B$. Підставивши $b = a - a_0$, де $a \in A$, в останню нерівність, отримаємо, що

$$f(a) - f(a_0) = f(a - a_0) \leq f(x_0 - a_0) = f(x_0) - f(a_0),$$

тобто $f(a) \leq f(x_0)$.



Тепер зосередимося на випадку, коли $0 \in A$. В цьому випадку множина A буде містити і деяку кулю вигляду rB_X , і, отже, буде поглинаючою множиною. Відповідно, функціонал Мінковського φ_A множини A коректно означений і буде опуклим функціоналом. Включення $rB_X \subset A$ означає, що $\varphi_A(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|$. Розглянемо підпростір $Y = \text{Lin}\{x_0\}$. Задамо на Y лінійний функціонал f так, щоб $f(x_0) = \varphi_A(x_0)$. Доведемо, що на Y лінійний функціонал f мажорується опуклим функціоналом φ_A . Справді, для $\lambda \geq 0$ з огляду на додатну однорідність функціонала Мінковського маємо $f(\lambda x_0) = \varphi_A(\lambda x_0)$. Водночас

$$f(-\lambda x_0) = -f(\lambda x_0) = -\varphi_A(\lambda x_0) \leq 0 \leq \varphi_A(-\lambda x_0).$$

Отже, умову мажорування $f(tx_0) \leq \varphi_A(tx_0)$ ми довели як для додатних, так і для від'ємних t , тобто умова мажорування виконується для всіх елементів простору Y .



Скористаємось теоремою Гана-Банаха в аналітичній формі і продовжимо f на весь простір X зі збереженням лінійності й умови мажорування. Умова мажорування, зокрема, означає, що $f(x) \leq \varphi_A(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|$, тобто $f \in X^*$. Нагадаємо, що, за означенням функціонала Мінковського, $\varphi_A(a) \leq 1$ для будь-якого $a \in A$, і, оскільки $x_0 \notin A$, $\varphi_A(x_0) \geq 1$. Зіставивши ці умови, одержуємо, що

$$f(a) \leq \varphi_A(a) \leq 1 \leq \varphi_A(x_0) = f(x_0)$$

для будь-якого $a \in A$. Крім того, f не тотожний нулеві, адже, як ми щойно перевірили, $f(x_0) \geq 1$. $\square$



Теорема Гана-Банаха в геометричній формі. Нехай A і B – неперетинні опуклі підмножини нормованого простору X і множина A відкрита. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geq \theta$ для всіх $b \in B$.

Доведення. Розглянемо допоміжну множину $C = A - B$. Згідно з лемами 2 і 3, C – відкрита опукла множина. Оскільки A і B не перетинаються, $0 \notin C$. Застосувавши головну лему до множини C і точки $x_0 = 0$, одержуємо існування функціонала $f \in X^* \setminus \{0\}$, для якого $f(a - b) \leq 0$ для всіх $a \in A$, $b \in B$. Виберемо $\theta = \sup_{a \in A} f(a)$. Оскільки нерівність $f(a) \leq f(b)$ виконується при всіх $a \in A$, $b \in B$, то і

$$\theta = \sup_{a \in A} f(a) \leq f(b)$$

для всіх $b \in B$. Умова ж $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ випливає з очевидної нерівності $f(a) \leq \theta$ і леми 5. □



Наслідок 1. Нехай A і B – неперетинні опуклі підмножини нормованого простору X і A має непорожню внутрішність. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) \leq \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geq \theta$ для всіх $b \in B$. При цьому у внутрішніх точках множини A виконується строга нерівність $f(x) < \theta$.

Доведення. Внутрішність $\overset{\circ}{A}$ множини A – це опукла відкрита множина. Залишається застосувати попередню теорему і скористатись щільністю $\overset{\circ}{A}$ в A . □

Прямим застосуванням леми 5 з основної теореми отримуємо

Наслідок 2. Нехай A і B – неперетинні опуклі відкриті підмножини нормованого простору X . Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) > \theta$ для всіх $b \in B$. □



Наслідок 3. Нехай A і B – неперетинні опуклі замкнені підмножини нормованого простору X і одна з цих множин – компакт. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) > \theta$ для всіх $b \in B$.

Доведення. Через $r = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ позначимо відстань між множинами A і B . З умови видно, що $r > 0$. Розглянемо допоміжні множини $A + \frac{r}{3}B_X$ і $B + \frac{r}{3}B_X$ – $\frac{r}{3}$ -околи множин A і B відповідно. Ці допоміжні множини відкриті, опуклі і не перетинаються, отже, до них можна застосувати попередній наслідок. $\square$

Вправи.

Сім'я множин називається **зчепленою**, якщо будь-які дві з них перетинаються. Говоритимемо, що банахів простір X має **властивість зчеплених куль**, якщо будь-яка зчеплена сім'я непорожніх замкнених куль (з довільними центрами і довільними радіусами) має непорожній перетин. Доведіть, що:

7.1. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ має властивість зчеплених куль, а $\mathbb{C}$ не має.

7.2. Дійсні простори ℓ_∞ та $L_\infty[0, 1]$ мають властивість зчеплених куль.



Банахів простір E називається **1-ін'єктивним**, якщо для операторів, які діють в E , виконується аналог теореми Гана-Банаха про продовження: для будь-якого Y – підпростору довільного нормованого простору X і будь-якого оператора $T \in L(Y, E)$ існує такий оператор $\tilde{T} \in L(X, E)$, що $\tilde{T}(y) = T(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

7.3. Якщо банахів простір E має властивість зчеплених куль, то E – 1-ін'єктивний простір (I. Nachbin, 1950).

