Функціональний аналіз

Лекція 7

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Теорема Гана-Банаха про продовження. Нехай Y – підпростір нормованого простору X, $f \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f}(y) = f(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Іншими словами, будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі нормованого простору, продовжується на весь простір зі збереженням норми. $\square$

Нехай X – нормований простір, $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Функціонал $f_0 \in X^*$ називається **опорним функціоналом у точці** x_0, якщо $\|f_0\| = 1$ і $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Теорема. Для будь-якої точки $x_0 \in X \setminus \{0\}$ існує опорний в цій точці функціонал. $\square$

Нагадаємо деякі факти з лінійної алгебри. Якщо X – скінченновимірний лінійний простір, X' – простір всіх лінійних функціоналів на X, то $\dim X' = \dim X$. Якщо $E \subset X'$ – підпростір і $E \neq X'$, то існує елемент $x_0 \in X \backslash \{0\}$, який анулюється всіма функціоналами з E: $\forall f \in E \ f(x_0) = 0$ (якщо в системі лінійних однорідних рівнянь невідомих більше ніж рівнянь, то система має ненульовий розв'язок).

Лема. На скінченновимірному нормованому просторі X будь-який лінійний функціонал неперервний.
Доведення. Розглянемо простір X^* неперервних лінійних функціоналів на X як лінійний підпростір простору X' всіх лінійних функціоналів на X. Припустимо, що $X^* \neq X'$. Тоді існує такий $x_0 \in X \backslash \{0\}$, що $f(x_0) = 0$ для будь-якого $f \in X^*$. Отже, для цього елемента x_0 не існує опорного функціонала. Суперечність. $\square$

Теорема. Нехай X, E – нормовані простори й X скінченновимірний. Тоді будь-який лінійний оператор T, який діє з X в E, неперервний.

Доведення. Виберемо в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$. Для кожного $x \in X$ позначимо через $\left\{x_k^*(x)\right\}_{k=1}^n$ коефіцієнти розкладу елемента x за базисом $\{x_k\}_{k=1}^n$: $x = \sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k$. Перевіримо, що x_k^* – лінійні функціонали. Справді, для будь-яких $x, y \in X$ і будь-яких скалярів a, b маємо:

$$\sum_{k=1}^n \left(ax_k^*(x) + bx_k^*(y)\right) x_k = a\sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k + b\sum_{k=1}^n x_k^*(y)x_k =$$

$$= ax + by = \sum_{k=1}^n x_k^*(ax + by)x_k.$$

З огляду на єдиність розкладу за базисом це означає, що $ax_k^*(x) + bx_k^*(y) = x_k^*(ax + by)$, тобто лінійність доведено.

За лемою, $x_k^* \in X^*$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Скориставшись лінійністю оператора T і нерівністю трикутника, для будь-якого $x \in X$ отримаємо оцінку:

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) T x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k^*(x)| \cdot \|Tx_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\| \cdot \|Tx_k\| \cdot \|x\|,$$

тобто $\|T\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left\| x_k^* \right\| \cdot \|Tx_k\| < \infty.$ □

Означення. Нехай X, Y –нормовані простори. Оператор $T : X \to Y$ називається ізоморфізмом, якщо він неперервний, бієктивний і обернений до нього оператор $T^{-1} : Y \to X$ також неперервний. Нормовані простори X і Y називаються ізоморфними (позначення: $X \approx Y$), якщо існує ізоморфізм $T : X \to Y$ цих просторів.

Вправи.

7.1. Якщо скінченновимірні нормовані простори X, Y над одним і тим самим полем мають однакову розмірність, то вони ізоморфні між собою.

7.2. На будь-якому нескінченновимірному нормованому просторі існує розривний лінійний функціонал.

7.3. Розглянемо $\ell_1^{(2)}$ – двовимірний аналог простору ℓ_1. Тобто $\ell_1^{(2)}$ – це простір векторів $\bar{x} = (x_1, x_2)$, наділений нормою $\|\bar{x}\| = |x_1| + |x_2|$. Доведіть, що опорний функціонал у точці $\bar{x}_0 = (1, 0)$ не єдиний. Опишіть всі опорні функціонали в цій точці.

7.4. Візьмемо за нормований простір X простір $\mathbb{R}^2$, наділений деякою нормою. Одинична сфера в цій нормі – це опукла замкнена крива γ в $\mathbb{R}^2$. Доведіть еквівалентність таких умов: 1) у кожній ненульовій точці простору X існує єдиний опорний функціонал; 2) крива γ в кожній своїй точці має єдину дотичну пряму.

Нехай A – підмножина нормованого простору X. Анулятором підмножини A називається множина функціоналів

$$A^{\perp} = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ для всіх } y \in A\}.$$

Теорема 1. $A^{\perp}$ – замкнений підпростір простору X^*.
Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in A^{\perp}$. Тоді для будь-якого $y \in A$ і будь-яких скалярів λ_1, λ_2 маємо $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(y) = \lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y) = 0$, тобто $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in A^{\perp}$. Лінійність доведено, перевіримо замкненість. Нехай $f_1, f_2, f_3, \ldots \in A^{\perp}$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $y \in A$. Тоді

$$|f(y)| = |f(y) - f_n(y)| = |(f - f_n)(y)| \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

і, отже, $f \in A^{\perp}$. Отже, границя функціоналів з $A^{\perp}$ знову лежить в $A^{\perp}$. □

Теорема 2. 1) Якщо $A \subset B$, то $A^{\perp} \supset B^{\perp}$. 2) $A^{\perp} = (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$. 3) Нехай $\overline{B}$ – замикання множини B. Тоді $\left(\overline{B}\right)^{\perp} = B^{\perp}$.

4) $A^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Lin} A}\right)^{\perp}$.

Доведення. 1) Якщо $f \in B^{\perp}$, то f анулює всі елементи множини B, а отже, і всі елементи множини A.

2) Включення $A^{\perp} \supset (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$ випливає з властивості 1). Доведемо обернене включення. Нехай $f \in A^{\perp}$, а $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ – довільна лінійна комбінація елементів множини A. Тоді $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0$. Отже, $f \in (\operatorname{Lin} A)^{\perp}$.

3) Якщо функціонал f перетворюється в нуль на всій множині B і неперервний, то f перетворюється в нуль і на $\overline{B}$. Тобто $\left(\overline{B}\right)^{\perp} \supset B^{\perp}$. Обернене включення випливає з властивості 1).

4) Ця властивість випливає з властивостей 2) і 3). □

Теорема 3. Для замкненого підпростору Y нормованого простору X такі властивості еквівалентні:

1. $Y = X$.
2. $Y^{\perp} = \{0\}$.

Доведення. Доведення потребує тільки імплікація 2.⇒1. Припустимо, що перша умова не виконується, тобто Y строго міститься в X. Тоді фактор-простір X/Y складається не тільки з нуля, і на X/Y існує деякий ненульовий неперервний лінійний функціонал g (скажімо, опорний функціонал якоїсь ненульової точки). Нехай $q \colon X \to X/Y$ – оператор, який діє за правилом $q(x) = [x]$ (фактор-відображення). Означимо функціонал f як композицію: $f(x) = g(q(x))$. Оскільки оператор q сюр'єктивний і g – не тотожний нуль, то й f не дорівнює тотожно нулю. Водночас $f \in Y^{\perp}$. Суперечність. □

Підмножина A нормованого простору X називається повною системою елементів нормованого простору X, якщо замикання лінійної оболонки множини A збігається з усім простором X.

Повні системи елементів виникають в різних задачах математичного аналізу при наближенні одних функцій іншими більш простого вигляду. Так, теорему Вейєрштрасса про щільність множини поліномів у просторі неперервних функцій на відрізку можна сформулювати так: послідовність степеневих функцій $\{1, t, t^2, \ldots\}$ повна в $C[a, b]$. У теорії тригонометричних рядів доводиться повнота в (комплексному) просторі $C[0, 2\pi]$ систем $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ і $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \ldots\}$. Важливі приклади повних систем виникають в курсі математичної фізики як системи власних функцій різних диференціальних операторів.

Критерій повноти системи. Нехай X – нормований простір. Множина $A \subset X$ є повною системою елементів тоді і тільки тоді, коли $A^{\perp} = \{0\}$.

Доведення.

$$\left(A^{\perp} = \{0\}\right) \Longleftrightarrow \left(\left(\overline{\mathrm{Lin}\, A}\right)^{\perp} = \{0\}\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{\mathrm{Lin}\, A} = X\right).$$

Приклад. Нехай $b > a > 0$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$ і послідовність (λ_k), $k = 1, 2, \ldots$ має граничну точку. Тоді система $\left\{f_k(t) = t^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ повна в $C[a, b]$.

Доведення. Розглянемо функціонал $x^* \in (C[a, b])^*$, який анулює всі f_k. Означимо функцію комплексної змінної $F(z) = x^*(t^z)$. Ця функція визначена при всіх $z \in \mathbb{C}$. Доведемо, що F голоморфна. Справді,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = x^*\Big(\frac{t^{z+\Delta z} - t^z}{\Delta z}\Big).$$

Оскільки при $\Delta z \to 0$ функція $\frac{t^{z+\Delta z} - t^z}{\Delta z}$ рівномірно на $[a, b]$ прямує до $\frac{\partial}{\partial z} t^z = t^z \ln t$, а функціонал x^* неперервний саме щодо рівномірної збіжності,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \to x^*(t^z \ln t), \quad \Delta z \to 0.$$

Голоморфність доведено.

Далі, за побудовою, $F(\lambda_k) = x^*(t^{\lambda_k}) = 0$. Тобто голоморфна функція F перетворюється в нуль на послідовності, яка має граничну точку в області голоморфності. За теоремою єдиності, $F(z) \equiv 0$. Зокрема, $F(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Це означає, що функціонал x^* анулює всі елементи повної системи функцій $\{1, t, t^2, \ldots\}$. Тобто $x^* = 0$. Ми довели, що анулятор системи $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ складається тільки з нульового функціонала. Отже, за доведеним вище критерієм, система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ повна. $\square$

Вправи.

7.5. Нормований простір сепарабельний тоді і тільки тоді, коли він містить зліченну повну систему елементів.
7.6. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ з вищенаведеного прикладу має таку незвичну властивість переповненості: будь-яка її нескінченна підсистема також повна.