# Функціональний аналіз

## Лекція 6

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

# Зміст лекції

Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Тоді $(L_p)^* = L_{p'}$, зокрема $(\ell_p)^* = \ell_{p'}$

$C(K)^*$ – це простір $M(K, \mathfrak{B})$ регулярних борелевських зарядів на $K$ з нормою $\|\nu\| = |\nu|(K)$.

Додамо ще один приклад: $(c_0)^* = \ell_1$.

Нехай $X$ – комплексний лінійний простір, тобто в $X$ визначено множення на комплексні скаляри. Тоді, зокрема, в $X$ визначено множення і на дійсні числа, тобто $X$ можна розглядати і як дійсний простір. Власне, на $X$ можна говорити про два типи лінійних функціоналів. А саме:

Функціонал $f$ на $X$ називається дійсним лінійним функціоналом, якщо $f$ набуває дійсні значення, адитивний (тобто $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для будь-яких $x, y \in X$) і дійсно-однорідний ($f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для будь-яких $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Функціонал $f$ на $X$ називається комплексним лінійним функціоналом, якщо $f$ має комплексні значення, адитивний і комплексно-однорідний ($f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для будь-яких $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Для будь-якого комплексного лінійного функціонала $f$ означимо у природний спосіб його дійсну і уявну частини:

$(\mathrm{Re}\, f)\, x = \mathrm{Re}(f(x))$, $(\mathrm{Im}\, f) x = \mathrm{Im}(f(x))$.

При такому означенні $\mathrm{Re} f$ і $\mathrm{Im} f$ – це дійсні функціонали, і $f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f$. Наступні дві теореми вичерпно описують зв'язок між дійсною й уявною частинами комплексного лінійного функціонала.

Теорема 1. Нехай $f$ – комплексний лінійний функціонал на $X$. Тоді для будь-якого $x \in X$ виконується співвідношення

$$\mathrm{Im} f(x) = -\mathrm{Re} f(ix).$$

Доведення. У рівність $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ підставимо $\lambda = i$ та обчислимо дійсні частини. Маємо

$$\mathrm{Re} f(ix) = \mathrm{Re}\,(if(x)) = -\mathrm{Im} f(x). \qquad \square$$

Теорема 2. Нехай $g$ – дійсний лінійний функціонал на $X$. Тоді функціонал $f$, який задається рівністю $f(x) = g(x) - ig(ix)$, є комплексним лінійним функціоналом.

Доведення. Адитивність функціонала $f$ і його дійсна однорідність очевидні. Перевіримо комплексну однорідність. Спочатку зазначимо, що

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i\,(g(x) - ig(ix)) = if(x).$$

Нехай тепер $\lambda = a + ib$ – довільне комплексне число. Маємо

$$f\,((a+ib)x) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = (a+ib)f(x). \quad \square$$

Теореми 1 і 2 означають, що відповідність $f \mapsto \mathrm{Re} f$ між комплексними і дійсними функціоналами бієктивна. Для нормованого простору $X$ можна сказати більше.

Теорема 3. Нехай $X$ – комплексний нормований простір, $f$ – неперервний комплексний лінійний функціонал на $X$. Тоді $\|f\| = \|\mathrm{Re} f\|$.

Доведення. Введемо позначення $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Скористаємось означенням норми функціонала і тим, що множина добутків $\{\lambda x : x \in S_X,\ \lambda \in \mathbb{T}\}$ збігається з $S_X$:

$$\|\mathrm{Re} f\| = \sup_{x \in S_X} |\mathrm{Re} f(x)| = \sup_{x \in S_X, \lambda \in \mathbb{T}} |\mathrm{Re} f(\lambda x)| =$$

$$= \sup_{x \in S_X} \left( \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} |\mathrm{Re} \lambda f(x)| \right). \qquad (*)$$

При фіксованому $x$ множина чисел вигляду $\{\lambda f(x) : \lambda \in \mathbb{T}\}$ утворює коло радіуса $|f(x)|$ з центром у нулі. Дійсні частини цих чисел заповнюють відрізок від $-|f(x)|$ до $|f(x)|$. Відповідно, $\sup_{\lambda \in \mathbb{T}} |\mathrm{Re} \lambda f(x)| = |f(x)|$. Підставивши це співвідношення в $(*)$, отримуємо: $\|\mathrm{Re} f\| = \sup_{x \in S_X} |f(x)| = \|f\|$. $\square$

Теорема Гана-Банаха про продовження. Нехай $Y$ – підпростір нормованого простору $X$, $f \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f}(y) = f(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Іншими словами, будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі нормованого простору, продовжується на весь простір зі збереженням норми.

Доведення. Почнемо з дійсного випадку. Означимо на $X$ опуклий функціонал $p$ формулою $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. При такому означенні функціонал $f$ задовольняє умову мажорування: $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Скористаємось теоремою Гана-Банаха в аналітичній формі. Нехай $\tilde{f}$ – продовження функціонала $f$ на весь $X$ зі збереженням умови мажорування. Тоді

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in S_X} \tilde{f}(x) \leqslant \sup_{x \in S_X} p(x) = \sup_{x \in S_X} \|f\| \cdot \|x\| = \|f\|,$$

і, відповідно, $\tilde{f}$ неперервний.

Обернена нерівність $\|\tilde{f}\| \geqslant \|f\|$ випливає з того, що функціонал $\tilde{f}$ – це продовження функціонала $f$:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in S_X} |\tilde{f}(x)| \geqslant \sup_{x \in S_Y} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in S_Y} |f(x)| = \|f\|.$$

Розглянемо тепер комплексний випадок. Нехай $X$ – комплексний нормований простір, $f$ – неперервний комплексний лінійний функціонал на $Y$. Тоді $g := \mathrm{Re} f$ є дійсним функціоналом, і, за щойно доведеним твердженням, існує такий дійсний функціонал $\tilde{g}$ на $X$, що $\tilde{g}(y) = g(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{g}\| = \|g\|$. Шуканий функціонал $\tilde{f}$ означимо рівністю $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$. Згідно з теоремою 2, $\tilde{f}$ – комплексний лінійний функціонал. Далі, для будь-якого $y \in Y$, згідно з теоремою 1, $\mathrm{Im} f(y) = -\mathrm{Re} f(iy) = -g(iy)$. Отже,

$$\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) - i\tilde{g}(iy) = g(y) - ig(iy) = f(y).$$

Нарешті, за теоремою 3, $\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = \|g\| = \|f\|$. □

## Вправи.

6.1. Доведіть, що для розривного лінійного функціоналу $f$, заданого на нормованому просторі $X$, ядро функціонала $f$ щільне в $X$.

6.2. Позначимо через $X$ підпростір нормованого простору $L_1[a, b]$, який складається з усіх неперервних функцій на $[a, b]$. Нехай $t_0 \in [a, b]$ – фіксована точка. Доведіть, що лінійний функціонал $\delta_{t_0}$ на $X$, який діє за правилом $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$, розривний. Перевірте щільність в $X$ підмножини функцій, які задовольняють умову $f(0) = 0$ (за попередньою вправою це має бути так).

6.3. Нехай $X$ – простір з попередньої вправи. Назвемо множину $\Delta \in [a, b]$ «дуже маленькою», якщо підпростір $V_\Delta \subset X$, що складається з функцій, які перетворюються в тотожний 0 на $\Delta$, щільний в $X$. Доведіть, що множина $\Delta$ буде «дуже маленькою» тоді і тільки тоді, коли її замикання має міру 0.

Нехай $X$ – нормований простір, $x_0 \in X\backslash\{0\}$. Функціонал $f_0 \in X^*$ називається опорним функціоналом у точці $x_0$, якщо $\|f_0\| = 1$ і $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Теорема. Для будь-якої точки $x_0 \in X\backslash\{0\}$ існує опорний в цій точці функціонал.

Доведення. Розглянемо підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Це одновимірний простір, і $x_0$ – базис простору $Y$. Задамо на $Y$ лінійний функціонал $f$ так, що $f(x_0) = \|x_0\|$. Іншими словами, для будь-якого $y = \lambda x_0 \in Y$ покладемо $f(y) = \lambda \|x_0\|$. Обчислимо норму функціонала $f$. Якщо $y = \lambda x_0 \in S_Y$, то $|\lambda| \|x_0\| = 1$. Відповідно,

$$\|f\| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |f(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |\lambda| \|x_0\| = 1.$$

Продовжимо функціонал $f$ до функціонала $f_0 \in X^*$ зі збереженням норми. Одержане продовження і буде опорним функціоналом: $\|f_0\| = \|f\| = 1$ і $f_0(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. $\square$