Функціональний аналіз

Лекція 5

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ і $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $fg \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ і справджується така нерівність Гельдера:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

де величини p і p' пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Означимо на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ функціонал інтегрування з вагою W_g, який діє за правилом

$$W_g(f) = \int_\Omega fgd\mu.$$

Згідно з нерівністю Гельдера, для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ добуток fg інтегровний, тобто функціонал W_g коректно визначений. Лінійність цього функціонала також очевидна.

Теорема. При $g \in L_{p'}$ функціонал W_g неперервний на L_p, і $\|W_g\| = \|g\|_{p'}$.

Доведення. Нерівність $\left|W_g(f)\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$, а з нею і оцінка $\left\|W_g\right\| \leqslant \|g\|_{p'}$ випливають з нерівності Гельдера. Доведемо обернену оцінку. З огляду на однорідність достатньо вивчити випадок $\|g\|_{p'} = 1$. Нехай спочатку $1 < p < \infty$. Розглянемо функцію $f = |g|^{p'/p} \operatorname{sign} g$. Ця функція лежить в L_p, і $\|f\|_p = 1$. Отже,

$$\left\|W_g\right\| \geqslant \left|W_g(f)\right| = \int_\Omega |g|^{p'/p+1} \, d\mu = \int_\Omega |g|^{p'} \, d\mu = 1 = \|g\|_{p'} .$$

При $p = \infty$ в попередньому міркуванні за f потрібно взяти $\operatorname{sign} g$. Дещо складніший випадок $p = 1$. У цьому випадку функціонал W_g, взагалі кажучи, не досягає своєї верхньої межі на одиничній сфері простору $L_p = L_1$, і для оцінки норми знизу недостатньо підставити одну конкретну вдало вибрану функцію.

Отож, розберемо цей останній випадок, що залишився. Оскільки $p = 1$, $p' = +\infty$, і, згідно нашого припущення, $\|g\|_\infty = 1$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Множина $|g|_{>1-\varepsilon} = \{\, t \in \Omega : |g(t)| > 1 - \varepsilon\}$ має додатну міру (інакше $\|g\|_\infty$ не перевищувала б $1-\varepsilon$). Виберемо в множині $|g|_{>1-\varepsilon}$ вимірну підмножину Δ скінченної ненульової міри. Розглянемо функцію $f = \frac{1}{\mu(\Delta)} \mathbb{1}_\Delta \operatorname{sign} g \in L_1$. Оскільки $\|f\|_1 = 1$, маємо:

$$\|W_g\| \geqslant |W_g(f)| = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Delta \, |g| \, d\mu$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon}{\mu(\Delta)} \int\limits_\Delta d\mu = 1 - \varepsilon = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Залишається спрямувати в отриманій оцінці ε до нуля.

Теорема. Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Тоді будь-який лінійній функціонал $G \in L_p^*$ однозначно зображується у вигляді функціонала W_g інтегрування з вагою, де функція $g \in L_{p'}$. При цьому $\|G\| = \|g\|_{p'}$.

Доведення. Формула для норми функціонала W_g вже доведена в попередньому пункті. Залишилось довести існування і єдиність шуканої функції $g \in L_{p'}$. Почнемо з єдиності. Нехай $G = W_{g_1} = W_{g_2}$. Тоді $W_{g_1 - g_2} = W_{g_1} - W_{g_2} = 0$ і $\|g_1 - g_2\|_{p'} = \left\|W_{g_1 - g_2}\right\| = 0$, тобто елементи g_1 і g_2 простору $L_{p'}$ збігаються.

Доведення існування потребує певних зусиль і буде поділене на кілька лем. При цьому спочатку ми розглянемо частковий випадок скінченної міри.

Лема 1. Нехай $1 \leqslant p < \infty$, $G \in L_p^*$ і $\mu(\Omega) < \infty$. Тоді існує така функція $g \in L_1$, що для будь-якого $\Delta \in \Sigma$ виконується співвідношення $G(\mathbb{1}_\Delta) = \int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Delta g d\mu$.

Доведення. Задамо на σ-алгебрі Σ функцію множини ν за таким правилом: $\nu(\Delta) = G(\mathbb{1}_\Delta)$. На підставі лінійності функціонала G і рівності $\mathbb{1}_{\Delta_1} + \mathbb{1}_{\Delta_2} = \mathbb{1}_{\Delta_1 \cup \Delta_2}$, що виконується для будь-якої диз'юнктної пари $\Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$, функція множини ν скінченно-адитивна. Перевіримо зліченну адитивність. Для цього доствтньо довести, що для будь-яких $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$, що утворюють спадний ланцюжок множин з порожнім перетином, $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. Справді, в цьому випадку

$$\left\|\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p = (\mu(A_k))^{1/p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

отже, з огляду на неперервність функціонала G

$$\nu(A_k) = G(\mathbb{1}_{A_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Отож ν – заряд. Далі, нерівність

$$|\nu(\Delta)| \leqslant \|G\| \cdot \|\mathbb{1}_\Delta\|_p = \|G\| \, (\mu(\Delta))^{1/p}$$

означає абсолютну неперервність заряду ν щодо міри μ. Шукану функцію $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ означимо як похідну Радона-Никодима заряду ν за мірою μ. Тоді

$$G(\mathbb{1}_\Delta) = \nu(\Delta) = \int\limits_\Delta g d\mu = \int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Delta g d\mu. \qquad \square$$

Лема 2. В умовах попередньої леми рівність

$$G(f) = \int\limits_{\Omega} fgd\mu \tag{1}$$

виконується для будь-якої функції $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення. Позначимо через F лінійний функціонал на L_∞, який діє за правилом $F(f) = G(f) - \int\limits_{\Omega} fgd\mu$. Оскільки всі функції вигляду $\mathbb{1}_\Delta$, $\Delta \in \Sigma$ лежать в $\operatorname{Ker} F$, то, як наслідок, $\operatorname{Ker} F$ містить і всі функції вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{\Delta_k}$, $\Delta_k \in \Sigma$ (всі скінченнозначні функції). Отже, ядро функціонала F щільне в L_∞ (теорема про апроксимацію).

Далі,

$$\begin{aligned}|F(f)| &\leqslant \|G\| \, \|f\|_p + \|f\|_\infty \|g\|_1 \\ &\leqslant \|G\| \, \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{1/p} + \|f\|_\infty \|g\|_1 \\ &= \left(\|G\| \, (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1\right) \|f\|_\infty ,\end{aligned}$$

тобто $\|F\| \leqslant \|G\| \cdot (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1 < \infty$ і функціонал F неперервний. Неперервний функціонал, що перетворюється на нуль на щільній множині, дорівнює нулю на всьому просторі.

Лема 3. Побудована функція g належить до простору $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення. Скориставшись попередньою лемою і неперервністю функціонала G в нормі $\| \, \|_p$, отримаємо, що для будь-якої функції $f \in L_\infty$ справджується оцінка

$$\left| \int\limits_{\Omega} fgd\mu \right| = |G(f)| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_p . \tag{2}$$

Розглянемо спочатку випадок $p > 1$ і, відповідно, $p' \neq \infty$. Зафіксуємо $N > 0$ і підставимо в (2) функцію

$$f = |g|^{p'-1} \mathbb{1}_{|g|<N} \operatorname{sign} g.$$

Маємо $\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\, d\mu = \left|\int\limits_{\Omega} fg d\mu\right| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_p =$

$$= \|G\| \cdot \Bigg(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{(p'-1)p}\, d\mu\Bigg)^{1/p} = \|G\| \cdot \Bigg(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\, d\mu\Bigg)^{1/p}.$$

Поділивши обидві частини нерівності на

$$\Bigg(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\, d\mu\Bigg)^{1/p}$$

і піднісши до степеня p', одержимо нерівність

$$\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\, d\mu \leqslant \|G\|^{p'}.$$

При прямуванні параметра N до нескінченності остання оцінка переходить в нерівність

$$\int\limits_{\Omega} |g|^{p'}\, d\mu \leqslant \|G\|^{p'},$$

яка означає, зокрема, що $g \in L_{p'}$.

Перейдемо до випадку $p = 1$ і $p' = \infty$. Припустимо, що $g \notin L_\infty$. Тоді для будь-якого $N > 0$ множина $|g|_{>N}$ має ненульову міру. Підставимо в (2) функцію $f = \mathbb{1}_{|g|_{>N}} \operatorname{sign} g$:

$$N\mu\left(|g|_{>N}\right) \leqslant \int\limits_{|g|_{>N}} |g|\, d\mu = \left|\int\limits_{\Omega} fgd\mu\right| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_1 = \|G\| \cdot \mu\left(|g|_{>N}\right).$$

Отримуємо, що будь-якого $N > 0$ виконується нерівність $N \leqslant \|G\|$. Суперечність.

Завершення доведення теореми. Отже, у випадку скінченної міри μ ми довели існування такої функції $g \in L_{p'}$, що для всіх $f \in L_\infty$ виконується співвідношення (1), яке можна записати у вигляді $G(f) = W_g(f)$. Тому, G і W_g – неперервні лінійні функціонали на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, які збігаються на щільній підмножині $L_\infty \subset L_p$. Отже, $G(f) = W_g(f)$ для всіх $f \in L_p$.

Перейдемо до випадку σ-скінченної міри μ. Зафіксуємо деяке зображення множини Ω у вигляді $\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, де $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ і $\Omega_n \in \Sigma$. Означимо числа $a_n = 2^n \mu(\Omega_n)$. Введемо на (Ω, Σ) нову міру μ_1 формулою

$$\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap \Omega_n)/a_n.$$

При такому означенні трійка (Ω, Σ, μ_1) буде простором зі скінченною мірою. Задамо на Ω функцію $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{\Omega_n}$.
Функція f інтегровна на Ω за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot h$ інтегровна на Ω за мірою μ_1 і $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega fh d\mu_1$.
Означимо лінійний оператор $T\colon L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1) \to L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ формулою $Tf = f \cdot h^{-1/p}$. Оператор T здійснює бієктивну ізометрію просторів $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ і $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$\|Tf\|^p = \int\limits_\Omega |f|^p h^{-1} d\mu = \int\limits_\Omega |f|^p d\mu_1 = \|f\|^p.$$

За функціоналом $G \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ побудуємо функціонал T^*G з простору $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)^*$ за правилом $(T^*G)(f) = G(Tf)$. Оскільки μ_1 – скінченна міра, функціонал T^*G потрапляє в умови вже доведеного часткового випадку теореми: існує така функція $g_1 \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu_1)$, що $(T^*G)(f) = \int_\Omega fg_1 d\mu_1$ для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$. Розшифруємо цю умову: для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ виконується співвідношення

$$G(Tf) = \int_\Omega fg_1 h d\mu = \int_\Omega (Tf) \cdot g_1 h^{1/p'} d\mu.$$

Перепозначимо Tf через $\tilde{f}$, а $g_1 h^{1/p'}$ через g. Тоді, як нам і потрібно, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, і рівність $G(\tilde{f}) = \int_\Omega \tilde{f} g d\mu$, як ми того і бажаємо, виконується для будь-якого $\tilde{f} \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.