Функціональний аналіз

Лекція 1

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Інформація про курс

- Назва дисципліни: Функціональний аналіз.
- Лектор: Кадець Володимир Михайлович.
- Тривалість курсу: один семестр, наприкінці іспит.

Основна література:

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів, 2012. – 590 с.

Допоміжна література:

Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Рад. школа», 1948.

Рудин У. Функциональный анализ. М., «Мир», 1975.

Нехай X – лінійний простір. Відображення $x \mapsto \|x\|$, яке ставить кожному елементові простору X у відповідність невід'ємне число, називається нормою, якщо воно задовольняє такі аксіоми:

(1) якщо $\|x\| = 0$, то $x = 0$ (невиродженість);
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ для будь-якого $x \in X$ і будь-якого скаляра λ;
(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Лінійний простір X, наділений нормою, називається нормованим простором.

Відстанню між елементами x_1, x_2 простору X називається величина $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$.

Лінійний оператор T, що діє з нормованого простору X у нормований простір Y, називається ізометричним вкладенням, якщо $\|Tx\| = \|x\|$ для будь-якого $x \in X$.

Бієктивне ізометричне вкладення називається ізометрією просторів. Простори X і Y ізометричні, якщо між ними існує ізометрія.

Підпростір нормованого простору – це лінійний підпростір, в нормі, що успадкована з вихідного простору.

1. Нехай K – компактний топологічний простір. Через $C(K)$ позначається нормований простір неперервних скалярних функцій на K з нормою $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in K\}$. Важливий частковий випадок простору $C(K)$ – це простір $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку $[a, b]$.

2. ℓ_∞ – це простір всіх обмежених числових послідовностей вигляду $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з нормою $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$.

3. c_0 – це простір всіх збіжних до нуля послідовностей. Норма на c_0 задається виразом $\|x\| = \max\limits_n |x_n|$.

4. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою (скінченною або нескінченною), $p \in [1, \infty)$ – фіксоване число. Через $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначається множина всіх вимірних скалярних функцій на Ω, для яких існує $\int_\Omega |f|^p d\mu$. При цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, вважаються в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, (так само як було в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$), одним і тим самим елементом. Для $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ покладемо

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Важливий частковий випадок – це простір $L_p[a, b]$ (тобто випадок $\Omega = [a, b]$ з мірою Лебега).

5. Простір ℓ_p (де $p \in [1, \infty)$)– це простір числових послідовностей вигляду $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, які задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вправи.

1.1. Нехай послідовність (x_n) елементів нормованого простору збігається до елемента x. Доведіть, що $\lim n \to \infty \|x_n\| = \|x\|$.

1.2. Доведіть, що збіжність в $C(K)$ – це рівномірна збіжність на K. Зокрема, збіжність в $C[a, b]$ – це рівномірна збіжність на $[a, b]$, – вид збіжності, добре знайомий з курсу математичного аналізу.

1.3. Для будь-яких $a < b$ простір $C[a, b]$ ізометричний простору $C[0, 1]$.

1.4. Якщо компакти K_1 і K_2 гомеоморфні, то $C(K_1)$ ізометрично $C(K_2)$.

Відомо, що навпаки, якщо $C(K_1)$ ізометрично $C(K_2)$, то K_1 і K_2 гомеоморфні, але доведення цього факту потребує додаткових знань.

Нехай X – лінійний простір, Y – підпростір в X. Введемо таке відношення еквівалентності на X: $x \sim z$, якщо $x - z \in Y$. Класом еквівалентності елемента x є множина

$$[x] = x + Y = \{x + y : \; y \in Y\}\,.$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена операціями

$$\lambda[x] = [\lambda x],$$

$$[x_1] + [x_2] = [x_1 + x_2],$$

називається фактор-простором простору X за підпростором Y і позначається X/Y.

Нехай Y – замкнений підпростір нормованого простору X, $x \in X$ – довільний елемент, $[x] = x + Y$ – відповідний елемент фактор-простору X/Y. Означимо таку величину:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| .$$

Іншими словами, $\|[x]\|$ – це відстань в X від 0 до множини $x+Y$. Оскільки Y – підпростір і, відтак, $Y = -Y$, то означення можна переписати наступним чином:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| .$$

Геометричний зміст цього означення: $\|[x]\|$ – це відстань в X від x до підпростору Y.

Теорема. Введена вище величина $\|[x]\|$ задає норму на просторі X/Y.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.
1. Нехай $\|[x]\| = 0$. Тоді $\inf_{y\in Y}\|x-y\| = 0$, і, отже, x – гранична точка підпростору Y. Оскільки Y замкнений, $x \in Y$ і $[x] = Y = [0]$.
2. Оскільки Y – підпростір, $\lambda Y = Y$ для будь-якого ненульового скаляра λ. Маємо:

$$\|[\lambda x]\| = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + y\| = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + \lambda y\|$$

$$= |\lambda| \inf_{y\in Y}\|x+y\| = |\lambda|\cdot\|[x]\|.$$

3. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням інфімума існують такі $y_1, y_2 \in Y$, що

$$\|x_1 + y_1\| < \|[x_1]\| + \varepsilon \text{ і } \|x_2 + y_2\| < \|[x_2]\| + \varepsilon.$$

Отримуємо оцінку

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 + y\| \leqslant \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \leqslant \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon,$$

що з огляду на довільність ε означає потрібну нерівність трикутника.

Надалі завжди будемо припускати, що фактор-простір нормованого простору наділений описаною вище нормою.

Приклад. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, X – простір всіх обмежених вимірних функцій на Ω, наділений нормою $\|f\| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$, Y – підпростір в X, який складається з функцій, що дорівнюють нулю майже скрізь. Відповідний фактор-простір X/Y позначається $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Вправи.

1.5. Доведіть таку формулу для норми в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$\|f\|_\infty = \inf_{A\in\Sigma, \mu(A)=0} \left\{ \sup_{t\in\Omega\setminus A} |f(t)| \right\}.$$

1.6. Доведіть нерівність $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} \|f\|_\infty$.

1.7. Доведіть, що $\|f\|_\infty$ дорівнює інфімуму множини тих сталих c, для яких $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} c$.