Функціональний аналіз

Лекція 2

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай X – нормований простір, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символом $B_X(x_0, r)$ позначається, як звичайно, відкрита куля радіуса r з центром в x_0:

$$B_X(x_0, r) = \{\, x \in X : \|x - x_0\| < r \,\}.$$

Одиничною кулею B_X простору X називається відкрита куля одиничного радіуса з центром в нулі:

$$B_X = \{\, x \in X : \|x\| < 1 \,\}.$$

Аналогічним чином вводяться одинична сфера S_X і замкнена одинична куля $\overline{B}_X$:

$$S_X = \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\}, \quad \overline{B}_X = \{\, x \in X : \|x\| \leqslant 1 \,\}.$$

Будь-яку кулю можна відтворити по одиничній кулі за допомогою формули $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$.

Опуклість кулі

Нехай X – лінійний простір, $x, y \in X$, $x \neq y$.
Прямою, яка проходить через точки x і y, називається множина всіх елементів вигляду $\lambda x + (1 - \lambda) y$, де $\lambda \in \mathbb{R}$.
Відрізком, який сполучає x і y, називається множина елементів вигляду $\lambda x + (1 - \lambda) y$, де $\lambda \in [0, 1]$.
Підмножина $A \subset X$ називається опуклою, якщо вона разом з будь-якими своїми двома точками містить увесь відрізок, який їх сполучає, тобто $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Теорема 1. B_X – опукла множина

Доведення. $\|\lambda x + (1 - \lambda) y\| \leqslant \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| < \lambda + (1 - \lambda) = 1.$

Поглинальність кулі

Підмножина A лінійного простору X називається поглинаючою (або поглинальною), якщо для будь-якого $x \in X$ існує таке $r > 0$, що $x \in tA$ для будь-якого $t > r$. Зазначимо, що поглинаюча множина A повинна містити нульовий елемент простору і $\bigcup_{n=1}^{\infty} nA = X$.

Теорема 2. B_X – поглинальна множина.

Доведення. Для $x \in X$ візьмемо $r = \|x\| + 1$. Перевіримо, що $x \in tB_X$ для будь-якого $t > r$, тобто, що $\frac{1}{t}x \in B_X$.

$$\left\|\frac{1}{t}x\right\| = \frac{1}{t}\|x\| < \frac{1}{r}\|x\| = \frac{1}{\|x\|+1}\|x\| < 1.$$

Збалансованість кулі

Підмножина A лінійного простору X називається збалансованою, якщо для будь-якого скаляра λ, $|\lambda| \leqslant 1$, виконується включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 3. B_X – збалансована множина.

Доведення. Для $x \in B_X$ і скаляра λ, $|\lambda| \leqslant 1$ маємо

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| < 1.$$

Алгебраїчна обмеженість і алгебраїчна відкритість кулі

Підмножина A лінійного простору X називається алгебраїчно обмеженою, якщо для будь-якого $x \in X \setminus \{0\}$ існує таке $a > 0$, що $ax \notin A$. Підмножина A лінійного простору X називається алгебраїчно відкритою, якщо для будь-якого $x \in A$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $(1 + \varepsilon)x \in A$.

Теорема 4. B_X – алгебраїчно обмежена і алгебраїчно відкрита.

Доведення. Насправді, виконуються сильніші властивості обмеженості і відкритості. Перевірку залишаємо слухачеві.

Нехай A – опукла поглинальна множина в X. Функціоналом Мінковського множини A називається дійсна функція, задана на X формулою

$$\varphi_A(x) = \inf\left\{t > 0 : \ \frac{1}{t}x \in A\right\}.$$

Функціонал φ_A зв'язаний з множиною A такими очевидними співвідношеннями:

- якщо $x \in A$, то $\varphi_A(x) \leqslant 1$;
- якщо $\varphi_A(x) < 1$, то $x \in A$.

Теорема 5. Нехай A – опукла поглинальна множина в X. Тоді φ_A – опуклий функціонал, який набуває невід'ємні значення.

Доведення. Доведемо спочатку додатну однорідність функціонала. Нехай $\lambda > 0$, $x \in X$. Тоді

$$\varphi_A(\lambda x) = \inf\left\{t > 0 : \ \frac{1}{t}\lambda x \in A\right\} = \inf\left\{\lambda s > 0 : \ \frac{1}{s}x \in A\right\} =$$
$$= \lambda \inf\left\{s > 0 : \ \frac{1}{s}x \in A\right\} = \lambda\varphi_A(x)$$

(в останньому ланцюжку рівностей використане перетворення $t \mapsto \lambda s$).

Тепер перевіримо нерівність трикутника. Нехай $x, y \in X$. Доведемо, що $\varphi_A(x+y) \leqslant \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$. Очевидно, для цього достатньо показати, що для будь-яких $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$ правильна нерівність $\varphi_A(x+y) \leqslant a+b$. Зафіксуємо числа $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$. Тоді $\varphi_A\left(\frac{x}{a}\right) < 1$, $\varphi_A\left(\frac{y}{b}\right) < 1$, тобто $\frac{x}{a} \in A$, і $\frac{y}{b} \in A$. На підставі опуклості множини A елемент

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$$

також лежить в A. Отже, $\varphi_A\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant 1$, і потрібну нерівність $\varphi_A(x+y) \leqslant a+b$ доведено. □

Теорема 6. Нехай B – опукла, поглинаюча, збалансована і алгебраїчно обмежена множина в лінійному просторі X. Тоді функціонал Мінковського φ_B задає норму на X.

Доведення. Те, що φ_B – опуклий функціонал, вже доведено. Оскільки B збалансована,

$$\varphi_B(\lambda x) = \varphi_B(|\lambda| x) = |\lambda| \varphi_B(x)$$

для будь-якого $x \in X$ і будь-якого скаляра λ, тобто φ_B – напівнорма.
Нарешті, якщо $x \in X \setminus \{0\}$, то на підставі алгебраїчної обмеженості існує таке $a > 0$, що $ax \notin B$. Отже, $\varphi_B(x) \geqslant \frac{1}{a} > 0$, чим доведено невиродженість функціонала Мінковського.

Вправи.
2.1. Перевірити формулу $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$.
2.2. В нормованому просторі $\varphi_{B_X}(x) = \|x\|$.
2.3. Нехай B – опукла, поглинаюча, збалансована, алгебраїчно обмежена множина в лінійному просторі X. Задамо норму на X як φ_B. Для того, щоб одинична куля цієї норми збігалася з B необхідно і досить, щоб B була алгебраїчно відкритою.
2.4. Нехай на лінійному просторі X задано дві норми $\|\ \|_1$ і $\|\ \|_2$, B_1 і B_2 – одиничні кулі цих норм. Тоді $B_1 \subset B_2$ тоді і тільки тоді, коли на всьому X виконується нерівність $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$.
2.5. Нехай на лінійному просторі X задано норми $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ і $\|\ \|_3$, B_1, B_2 і B_3 – одиничні кулі цих норм. Нехай $\|\ \|_3$ виражається через $\|\ \|_1$ і $\|\ \|_2$ формулою $\|x\|_3 = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$. Тоді $B_3 = B_1 \cap B_2$.

Теорема 7. $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ – лінійний простір, а $\| \|_p$ – норма на просторі $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення.

НЕ ВСТИГЛИ. БУДЕ НА НАСТУПНІЙ ЛЕКЦІЇ