Функціональний аналіз

Лекція 3

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Простори L_p. Перевірка лінійності та виконання аксіом норми

Норма оператора. Простори $L(X, Y)$, $L(X)$ і X^*

Теорема 6 з попередньої лекції. Нехай B – опукла, поглинаюча, збалансована і алгебраїчно обмежена множина в лінійному просторі X. Тоді функціонал Мінковського φ_B задає норму на X.

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою (скінченною або нескінченною), $p \in [1, \infty)$ – фіксоване число. Через $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначається множина всіх вимірних скалярних функцій на Ω, для яких існує $\int_\Omega |f|^p d\mu$. При цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, вважаються в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, одним і тим самим елементом. Для $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ покладемо

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Якщо простір з мірою (Ω, Σ, μ) фіксований, простір $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ скорочено позначають L_p.

Теорема 7 з попередньої лекції. $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ – лінійний простір, а $\| \, \|_p$ – норма на просторі L_p.

Доведення. Розглянемо в лінійному просторі всіх вимірних функцій на Ω множину $B_p \subset L_p$, що складається з функцій, для яких $\int_\Omega |f|^p d\mu < 1$. Нехай $f, g \in B_p$, $\lambda \in [0, 1]$. Оскільки функція $|x|^p$ опукла на $\mathbb{R}$, для будь-якого $t \in \Omega$ справджується числова нерівність

$$|\lambda f(t) + (1 - \lambda) g(t)|^p \leqslant \lambda |f(t)|^p + (1 - \lambda) |g(t)|^p.$$

Інтегруючи цю нерівність, отримуємо, що

$$\int_\Omega |\lambda f + (1 - \lambda) g|^p \, d\mu \leqslant \lambda \int_\Omega |f|^p d\mu + (1 - \lambda) \int_\Omega |g|^p d\mu < 1,$$

тобто $\lambda f + (1 - \lambda) g \in B_p$, що доводить опуклість множини B_p. З опуклості і того, що $0 \in B_p$ випливає, що для $t > 0$ множина tB_p зростає зі зростанням t. Легко перевірити, що B_p збалансована й алгебраїчно обмежена.

З опуклості та збалансованості множини B_p і очевидної рівності $L_p = \bigcup_{t>0} tB_p$ випливає, що L_p – лінійний простір і B_p – поглинальна множина в L_p. Отже, функціонал Мінковського φ_{B_p} визначений на L_p і задає норму в цьому лінійному просторі. Залишається тільки зазначити, що $\| \ \|_p$ збігається з φ_{B_p}. Справді, для будь-якого $f \in L_p$ маємо

$$\varphi_{B_p}(f) = \inf\left\{t > 0 : \ \frac{1}{t} f \in B_p\right\} = \inf\left\{t > 0 : \ \int_\Omega \left|\frac{1}{t} f\right|^p d\mu < 1\right\}$$
$$= \inf\left\{t > 0 : \ \int_\Omega |f|^p d\mu < t^p\right\} = \inf\left\{t > 0 : \ \|f\|_p < t\right\} = \|f\|_p .$$

Вправи.

3.1. ℓ_p, який розглядається як множина, збільшується із зростанням p, а величина $\|x\|_p$ при фіксованому x спадає зі зростанням p.

3.2. Якщо $1 \leqslant p_1 < p < \infty$, то множина ℓ_{p_1} щільна в просторі ℓ_p.

Теорема. Нехай X, Y – нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:

(1) T неперервний;

(2) існує така стала $C > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується оцінка $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$.

Нормою лінійного оператора T, що діє з нормованого простору X в нормований простір Y, називається величина

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\|\,.$$

Твердження 1. Нехай $\|T\| < \infty$. Тоді для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$.

Доведення. Для $x = 0$ нерівність виконується. Розглянемо випадок $x \neq 0$. Оскільки $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$, то $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|T\|$. Маємо

$$\|Tx\| = \|x\|\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,.$$

Твердження 2. Нехай $C > 0$ – така стала , що для будь-якого $x \in X$ виконується оцінка $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$. Тоді $\|T\| \leqslant C$.

Доведення.

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| \leqslant \sup_{x \in S_X} C\|x\| = C.$$

З попередніх двох тверджень та критерію неперервності випливає наступне:

Теорема. Нехай X, Y – нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:

(1) T неперервний;

(2) $\|T\| < \infty$. $\square$

В літературі можна прочитати ще низку еквівалентних означень норми оператора:

- $\|T\| = \sup\limits_{x \in B_X} \|Tx\|$;
- $\|T\| = \sup\limits_{x \in \overline{B}_X} \|Tx\|$;
- $\|T\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$;
- $\|T\|$ – це інфімум всіх таких констант $C \geqslant 0$, що нерівність $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ виконується для всіх $x \in X$.

Перевірку еквівалентності цих означень початковому ми залишаємо слухачеві як вправу.

Через $L(X, Y)$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних операторів з нормованого простору X в нормований простір Y. На $L(X, Y)$ природним способом вводяться лінійні операції: якщо $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ – оператори, λ_1, λ_2 – скаляри, то оператор $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in L(X, Y)$ діє за правилом

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) x = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x.$$

Вище ми описали, як вводиться норма на $L(X, Y)$ – норма оператора, але ще не перевірили, чи ця норма справді задовольняє аксіоми норми.

Теорема. Простір операторів $L(X, Y)$ – це нормований простір.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.
1. Нехай $\|T\| = 0$. Тоді для всіх $x \in X$

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \, \|x\| = 0,$$

тобто T дорівнює 0 в усіх точках простору X.

2. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|\lambda Tx\| = |\lambda| \sup\limits_{x \in S_X} \|Tx\| = |\lambda| \, \|T\|$.

3. Нехай $T_1, T_2 \in L(X, Y)$, $x \in X$. Скористаємось твердженням 1:

$$\|(T_1 + T_2)\, x\| \leqslant \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|x\| + \|T_2\| \cdot \|x\|$$

$$= (\|T_1\| + \|T_2\|) \cdot \|x\| .$$

Згідно з твердженням 2 звідси випливає потрібна нерівність трикутника:

$$\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\| . \qquad \square$$

Теорема. Нехай X, Y, Z – нормовані простори, $T_1 \in L(X, Y)$, $T_2 \in L(Y, Z)$. Тоді має місце наступна мультипликативна нерівність трикутника для композиції операторів:

$$\|T_2 \circ T_1\| \leqslant \|T_2\| \cdot \|T_1\| .$$

Доведення. Для всіх $x \in X$ маємо:

$$\|(T_2 \circ T_1)(x)\| = \|T_2(T_1(x))\| \leqslant \|T_2\| \cdot \|T_1(x)\| \leqslant \|T_2\| \cdot \|T_1\| \cdot \|x\| .$$

Спряженим простором до нормованого простору X називається простір X^* усіх неперервних лінійних функціоналів на X, наділений нормою $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} |f(x)|$. Іншими словами, якщо X – дійсний простір, то $X^* = L(X;\mathbb{R})$, якщо ж X – комплексний простір, то $X^* = L(X;\mathbb{C})$.

Ще одне корисне скорочення: $L(X) := L(X,X)$.

Так само, як для норми оператора, для норми функціонала є інші стандартні означення. Випишемо одне з тих, де відіграє роль те, що мова йде саме про функціонали, а не про оператори загального вигляду.

Зауваження. Нехай X – дійсний нормований простір, $f \in X^*$. Тоді $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} f(x)$.

Доведення. Скористаємось симетричністю сфери: $x \in S_X$ тоді і тільки тоді, коли $-x \in S_X$. Отже, $\sup\limits_{x \in S_X} f(x) = \sup\limits_{x \in S_X} f(-x)$.

Відповідно,

$$\|f\| = \sup_{x \in S_X} |f(x)| = \sup_{x \in S_X} \max\{f(x), -f(x)\} =$$

$$= \max\left\{\sup_{x \in S_X} f(x), \sup_{x \in S_X} f(-x)\right\} = \sup_{x \in S_X} f(x). \qquad \square$$