Функціональний аналіз

Лекція 4

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2021

Зміст лекції

Нехай μ – борелева міра на компакті K, $g \in L_1(K, \mathfrak{B}, \mu)$. Означимо для $f \in C(K)$ інтеграл з вагою $F_{g,\mu}$:

$$F_{g,\mu}(f) = \int_K fgd\mu.$$

Теорема 1. $F_{g,\mu} \in C(K)^*$, $\|F_{g,\mu}\| \leqslant \int_K |g|d\mu$.

Доведення. На дошці.

Нехай μ – борелева міра на компакті K. Для будь-якої підмножини $A \subset K$ означимо внутрішню міру $\mu_*(A)$ як супремум мір всіх замкнених множин, які містяться в A. Міра μ називається регулярною, якщо для всіх борелевих підмножин $\mu_*(A) = \mu(A)$. Іншими словами, міра μ є регулярною, якщо для будь-якої борелевої підмножини $A \subset K$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена підмножина $B \subset A$ з $\mu(B) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$.

Теорема 2. Якщо μ – регулярна борелева міра, то $\|F_{g,\mu}\| = \int_K |g| d\mu$.

Доведення. На дошці.

Теорема 3. Нехай (Ω, Σ) – множина із заданою на ній σ-алгеброю, $\Delta \in \Sigma$, $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \to [0, +\infty)$ – зліченно-адитивні міри і $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Тоді якщо функція $f \colon \Delta \to \mathbb{R}$ інтегровна за μ_2, то ця функція інтегровна і за μ_1.

Доведення. Згідно з критерієм, функція f інтегровна на множині Δ за мірою μ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке розбиття D_ε множини Δ, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми $\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu)$ і $\underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu)$ функції f за мірою μ визначені і відрізняються менше ніж на ε. Твердження теореми випливає з нерівності

$$\left|\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_1) - \underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_1)\right| \leqslant \left|\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_2) - \underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_2)\right|.$$

□

Нехай (Ω, Σ) – множина із заданою на ній σ-алгеброю, ν – заряд на Σ і f – вимірна функція на Ω. Функція f називається інтегровною на множині $\Delta \in \Sigma$ за зарядом ν, якщо f інтегровна за варіацією цього заряду.
З теореми 3 і нерівності $\nu^+ \leqslant |\nu|$, $\nu^- \leqslant |\nu|$ випливає, що якщо f інтегровна за ν, то f інтегровна як за ν^+, так і за ν^-.

Назвемо інтегралом функції f за зарядом ν на підмножині Δ величину

$$\int_{\Delta} f d\nu = \int_{\Delta} f d\nu^+ - \int_{\Delta} f d\nu^-. \tag{1}$$

За допомогою формули (1) на інтеграл за зарядом легко переносяться такі основні властивості інтеграла за мірою, як лінійність за функцією, зліченна адитивність за множиною і навіть теорема Лебега про мажоровану збіжність. Дещо складніше з оцінками інтегралів: інтеграл за зарядом від більшої з двох функцій може виявитись меншим за інтеграл від меншої з них. Тому у випадку інтегрування за зарядом використовують нерівність

$$\left|\int\limits_A f d\nu\right| \leqslant \int\limits_A |f|\, d\,|\nu|, \tag{2}$$

яка також легко випливає з означення:

$$\left|\int\limits_A f d\nu\right| = \left|\int\limits_A f d\nu^+ - \int\limits_A f d\nu^-\right| \leqslant \int\limits_A |f|\, d\nu^+ + \int\limits_A |f|\, d\nu^- = \int\limits_A |f|\, d\,|\nu|.$$

Заряд ν, заданий на σ-алгебрі $\mathfrak{B}$ борелевих підмножин компакту K, називається регулярним борелевим зарядом на K, якщо ν^+ і ν^- – регулярні борелеві міри. Позначимо

$$\|\nu\| = |\nu|(K).$$

Нехай ν – борелів заряд на компакті K. Функціоналом, породженим зарядом ν, називатимемо відображення $\mathbf{F}_\nu \colon C(K) \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $\mathbf{F}_\nu(f) = \int\limits_K f d\nu$.

Теорема Ріса–Маркова–Какутані (про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$). Для будь-якого неперервного лінійного функціонала F на $C(K)$ існує єдиний регулярний борелів заряд ν на K, який породжує цей функціонал (тобто для якого $F = \mathbf{F}_\nu$). При цьому $\|F\| = \|\nu\|$.

Доведення. Розділ 8 підручника.

Вправи.

Для кожного з перерахованих нижче функціоналів на $C[0,1]$: (a) перевірте лінійність і неперервність; (b) обчисліть норму; (c) знайдіть зображення у вигляді $\mathbf{F}_\nu$, де ν – регулярний борелів заряд на відрізку $[0,1]$; (d) знайдіть варіацію отриманого заряду і перевірте на цих прикладах формулу $\|\mathbf{F}_\nu\| = \|\nu\|$; (e) з'ясуйте, чи буде норма функціонала максимумом його значень на одиничній сфері.

4.1. $G(f) = f(0)$.

4.2. $G(f) = \int_0^1 tf(t)dt$.

4.3. $G(f) = \int_0^1 f(t)(t - \frac{1}{2})dt$.

Для будь-якого $1 < p < \infty$ спряженим показником називається число $p' = \frac{p}{p-1}$. Для $p = 1$ за спряжений показник p' приймають $+\infty$, а для $p = +\infty$ покладають $p' = 1$.

Величини p і p' пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Зазначимо, що $(p')' = p$, і що якщо $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $2 \leqslant p' \leqslant \infty$, і, нарешті, $2' = 2$.

Лема. будь-яких скалярів $a, b \geqslant 0$ і $1 < p < \infty$ виконується нерівність $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.

Доведення. Ліва частина нерівності дорівнює площі прямокутника $[0, a] \times [0, b]$, а доданки, що стоять у правій частині, дорівнюють відповідно площам фігур $S_1 = \left\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1}\right\}$ і $S_2 = \left\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant y^{p'-1}\right\}$. На підставі рівності $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ межі $y = x^{p-1}$ і $x = y^{p'-1}$ цих фігур проходять по одній і тій самій кривій. Залишається зазначити, що $[0, a] \times [0, b] \subset S_1 \cup S_2$

Теорема. Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ і $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $fg \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ і справджується така нерівність Гельдера: $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Для $1 < p < \infty$ детальніший запис - це

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\, d\mu\right)^{1/p'} .$$

Доведення. Розглянемо випадок $1 < p < \infty$. Прості випадки $p = 1, \infty$ залишимо читачеві. Підставивши в нерівність $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ числа $|f(t)|$ замість a і $|g(t)|$ замість b, одержимо оцінку

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^{p'}}{p'}. \tag{2}$$

Тобто вимірна функція fg має інтегровну мажоранту і, отже, сама інтегровна. Далі, нерівність Гельдера стійка щодо множення функцій f і g на скаляри. Тому її достатньо доводити для випадку $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Скористаємось нерівністю (2):

$$\|fg\|_1 = \int\limits_\Omega |fg| d\mu \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'} \right) d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'} . \qquad \square$$

Частковий випадок нерівності Гельдера – це нерівність Гельдера для рядів: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p'} \right)^{1/p'}$.