Факультет математики і інформатики ХНУ ім. В.Н.Каразіна

В. М. Кадець

Компактні самоспряжені оператори

Матеріали для студентів курсу
"Функціональний аналіз"

що навчаються дистанційно під час карантину

Цей текст є дещо переробленою компіляцією матеріалу, що розпорошений по різним розділам базового підручнику з функціонального аналізу [Kad], а також лекційних матеріалів, що раніше були в автора лише у рукописній формі.

Система позначень в цьому тексті та ж сама, що й в [Kad], тому тут ми її не наводимо.

Харків, квітень-травень 2020

Зміст

Розділ 1. Компакти в гільбертовому просторі

Нехай X – метричний простір, $A, C \subset X$, $\varepsilon \geqslant 0$. Нагадаємо, що множина C називається *ε-сіткою* для A, якщо для будь-якого $a \in A$ існує $x \in C$ з $\rho(x, a) < \varepsilon$. Іншими словами, множина C є ε-сіткою для A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $a \in A$ $\rho(a, C) < \varepsilon$. Підмножина A метричного простору X називається *передкомпактом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ у A існує скінченна ε-сітка.

Нагадаємо очевидні властивості передкомпактів: якщо $A \supset B$ і A – передкомпакт, то і B – передкомпакт; об'єднання скінченного числа передкомпактів – передкомпакт. Кожен передкомпакт – обмежена множина, тобто міститься в деякій кулі скінченного радіуса (для цього досить навіть існування скінченної ε-сітки при деякому одному фіксованому значенні ε). Множина в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ є передкомпактом тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Так само, як і в довільному повному метричному просторі, для замкненої підмножини A гільбертового простору H такі умови еквівалентні:

- A – компактна множина;
- A – передкомпакт;
- з будь-якої послідовності елементів множини A можна виділити збіжну підпослідовність.

Також нагадаємо наступну зручну властивість [Kad, Лема 2 пункту 1.4.1]: *Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина A має передкомпактну ε-сітку. Тоді A – передкомпакт.*

Теорема 1.1. *Передкомпактність стійка щодо лінійних операцій:*

(a) якщо A, B – передкомпакти в гільбертовому просторі, то $A + B$ – передкомпакт;

(b) якщо $A \subset H_1$ – передкомпакт, $T \in L(H_1, H_2)$, то $T(A)$ – передкомпакт в H_2;

(c) зокрема, передкомпактність зберігається при множенні на скаляр.

Доведення. (a) Нехай A_1, B_1 – скінченні $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки множин A і B відповідно. Тоді $A_1 + B_1$ – скінченна ε-сітка множини $A + B$.

(b) Якщо A_1 – скінченна $\frac{\varepsilon}{\|T\|}$-сітка множини A, то $T(A_1)$ – скінченна ε-сітка множини $T(A)$.

(c) Множення на фіксований скаляр – неперервний лінійний оператор. □

Теорема 1.2. *Нехай A – обмежена підмножина в гільбертовому простору H і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний підпростір $Y \subset H$ який утворює ε-сітку для A. Тоді A – передкомпакт.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ Нехай підпростір $Y \subset H$ скінченновимірний і є ε-сіткою для A. Позначимо через r таке число, що $A \subset rB_H$. Розглянемо множину $(r+\varepsilon)B_Y$. Це обмежена підмножина скінченновимірного простору Y, отже, вона – передкомпакт. Оскільки Y – ε-сітка для A, для будь-якого $x \in A$ існує $y \in Y$ з $\|x - y\| < \varepsilon$. Але y лежить в $(r+\varepsilon)B_Y$:

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| < r + \varepsilon.$$

Отже, множина $(r+\varepsilon)B_Y$ – це теж ε-сітка для A. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми знайшли для A передкомпактну ε-сітку, що означає передкомпактність множини A. □

До наступної теореми потрібно поставитись як до важливого попередження: у нескінченновимірному просторі замкнені обмежені множини не обов'язково є компактами!

Теорема 1.3. *Замкнена одинична куля нескінченновимірного гільбертового простору H не є компактом.*

Доведення. Доведемо, що $\overline{B}_H$ не має скінченних ε-сіток з $\varepsilon \in (0,1)$. Нехай $A \subset H$ – скінченна множина. Тоді ортогональне доповнення $A^\perp$ – це ненульовий підпростір в H. Візьмемо довільний $x \in A^\perp$ з $\|x\| = 1$. Тоді $x \in \overline{B}_H$, але за теоремою Піфагора, для будь-якого $a \in A$ маємо $\|a - x\|^2 = \|a\|^2 + \|x\|^2 \geqslant 1 > \varepsilon$, тобто A не є ε-сіткою для $\overline{B}_H$. □

Наступна теорема – це головний робочий інструмент для перевірки передкомпактності множин у гільбертовому просторі. Цей інструмент використовує розклади за ортонормованим базисом.

Теорема 1.4. *Нехай H – гільбертів простір з ортонормованим базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset H$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 \leqslant \varepsilon$ для всіх $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$.*

Доведення. Почнемо з достатності. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і оберемо відповідний номер $m = n(\varepsilon^2)$ з умов теореми. Щоб довести передкомпактність множини D скористуємося Теоремою 1.2. Позначимо $Y = \mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^m$. Y – це скінченновимірний простір. Доведемо, що Y – це ε-сітка для D. Візьмемо довільний елемент $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$. Тоді $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{x}_k e_k \in Y$ і

$$\rho(x, Y) \leqslant \|x - y\| = \left\| \sum_{k=m}^{\infty} \hat{x}_k e_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |\hat{x}_k|^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Тобто в один бік доведення завершене.

Тепер доведемо необхідність. Припустимо, що D – передкомпакт. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і оберемо скінчену δ-сітку $A \subset H$ для D з настільки малим $\delta > 0$, що $(3\delta)^2 < \varepsilon$. Для кожного n позначимо P_n ортопроектор простору H на $\mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Оберемо таке $n \in \mathbb{N}$, щоб для кожного елемента a нашої скінченної множини A виконувалася умова

$$\|a - P_n a\| < \delta.$$

Покажемо, що це n і є тим $n(\varepsilon)$, яке ми маємо знайти. Розглянемо довільний $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in D$ і оберемо той $a \in A$, що $\|x - a\| < \delta$. Тоді

$$\|x - P_n x\| \leqslant \|x - a\| + \|a - P_n a\| + \|P_n a - P_n x\| \leqslant 2\|x - a\| + \|a - P_n a\| \leqslant 3\delta,$$

тобто $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 = \|x - P_n x\|^2 \leqslant (3\delta)^2 < \varepsilon.$ □

Вправи

1. Для наступних множин в просторі ℓ_2 з'ясувати чи є вона 1) замкненою, 2) обмеженою, 3) передкомпактом, 4) компактом?

$$A_1 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \colon \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad 0 \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

(Множина A_1 має назву "цеглина Гільберта").

$$A_2 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \colon \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad 0 \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}.$$

$$A_3 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \colon \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad x_k \geqslant 0 \quad \text{та} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{k} x_k \leqslant 1 \right\}.$$

2. Якщо для множини A в просторі ℓ_2 існує елемент $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, що мажорує A у тому сенсі, що $|x_k| \leqslant |y_k|$ для будь-якого $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ і всіх k, то A – передкомпакт.

3. Наведіть приклад передкомпакта A в просторі ℓ_2, який не задовольняє достатню умову передкомпактності з попередньої вправи.

4. Замикання опуклої оболонки компакта в гільбертовому просторі – компакт.

5. Наведіть приклад, який показує, що опукла оболонка компакта в гільбертовому просторі не обов'язково є компактом.

6. Для будь-якого передкомпакта K в в гільбертовому просторі H існує послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, яка прямує до нуля, така що K цілком міститься в замиканні опуклої оболонки послідовності$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Розділ 2. Скінченновимірні оператори і компактні оператори

Означення 2.1. Неперервний лінійний оператор називається *скінченновимірним* або *оператором скінченного рангу*, якщо його образ скінченновимірний.

Нам відомі вже різні приклади скінченновимірних операторів: лінійні функціонали, оператори частинних сум ряду Фур'є та ортопроектори на скінченновимірні підпростори. Великий клас прикладів надає наступна теорема.

Теорема 2.2. *Нехай H_1, H_2 – гільбертові простори, $T \in L(H_1, H_2)$ – скінченновимірний оператор. Тоді існують дві скінчені підмножини $\{x_k\}_{k=1}^n \subset H_1$, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset H_2$, такі що дія оператора T на всі елементи h простору H_2 записується у вигляді*

$$Th = \sum_{k=1}^{n} \langle h, x_k \rangle \, y_k. \tag{2.1}$$

Доведення. Оскільки за означенням скінченновимірного оператора підпростір $Y = T(H_1)$ – скінченновимірний, в Y існує ортонормований базис $\{y_k\}_{k=1}^n$. Введемо позначення $f_k(h) = \langle Th, y_k \rangle$. Очевидно, що ці f_k є неперервними лінійними функціоналами на H_1. Тому існують елементи $x_k \in H_1$ такі, що $f_k(h) = \langle h, k_k \rangle$ для всіх $h \in H_1$ (теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі, див. детальне доведення у додатку, теорема 5.1). Розглянемо розклад елемента Th по ортонормованому базису $\{y_k\}_{k=1}^n$:

$$Th = \sum_{k=1}^{n} \langle Th, y_k \rangle \, y_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(h) \, y_k = \sum_{k=1}^{n} \langle h, x_k \rangle \, y_k,$$

тобто (2.1) дійсно має місце. □

Зауважимо, що будь-який оператор вигляду (2.1) є скінченновимірним, бо його образ $T(H_1)$ міститься у скінченновимірному підпросторі – лінійній оболонці векторів $\{y_k\}_{k=1}^n$. Таким чином, Теорема 2.2 надає загальний вигляд скінченновимірного оператора.

Означення 2.3. Оператор $T \in L(H_1, H_2)$ називається *компактним* або *цілком неперервним*, якщо образ $T(B_{H_1})$ одиничної кулі простору H_1 є передкомпактом у просторі H_2. Сім'я всіх компактних операторів, які діють з простору H_1 у простір H_2, позначається $K\,(H_1, H_2)$.

Оскільки будь-яка обмежена множина міститься в деякій кулі, образ будь-якої обмеженої множини під дією компактного оператора буде міститись у множині вигляду $rT(B_{H_1})$ і, отже, буде передкомпактом.

Приклад 2.4. *Будь-який скінченновимірний оператор $T \in L(H_1, H_2)$ є компактним, тому що $T(B_{H_1})$ – це обмежена множина у скінченновимірному просторі $T(H_1)$, тобто є передкомпактом.*

Приклад 2.5. *Якщо простір H нескінченновимірний, то одиничний оператор в H – це не компактний оператор. Справді, $I(B_H) = B_H$, а одинична куля нескінченновимірного простору не є передкомпактом.*

Теорема 2.6. *Множина компактних операторів $K(H_1, H_2)$ має такі властивості:*

(1) $K(H_1, H_2)$ – лінійний підпростір в $L(H_1, H_2)$.

(2) $K(H_1, H_2)$ – операторний ідеал, тобто якщо $T \in K(H_1, H_2)$, то добутки AT і TA компактні для будь-якого неперервного оператора A, для якого має сенс відповідна композиція.

(3) Множина $K(H_1, H_2)$ замкнена в $L(H_1, H_2)$ в сенсі збіжності за нормою[1].

Доведення. (1). Стійкість щодо множення на скаляр очевидна, а стійкість щодо додавання випливає зі співвідношення $(T_1 + T_2)(B_{H_1}) \subset T_1(B_{H_1}) + T_2(B_{H_1})$ і того, що сума передкомпактів – передкомпакт.

(2). Нехай $A \in L(Z, H_1)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору Z під дією оператора A переходить в обмежену множину, яку, у свою чергу, оператор T переводить у передкомпакт. Тому оператор TA компактний. Нехай тепер $A \in L(H_2, Z)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору H_1 переходить під дією оператора T в передкомпакт, який, у свою чергу, переводиться оператором A також у передкомпакт.

(3). Нехай послідовність компактних операторів T_n збігається за нормою до оператора T: $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Потрібно довести компактність граничного оператора. Для цього зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і побудуємо передкомпактну ε-сітку для $T(B_{H_1})$. Виберемо такий номер n, що $\|T - T_n\| < \varepsilon$. Розглянемо передкомпакт $K = T_n(B_{H_1})$. Для будь-якого $x \in B_{H_1}$ маємо

$$\|Tx - T_nx\| \leqslant \|T - T_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

Отже, K утворює шукану ε-сітку. □

[1] Звертаємо увагу читача, що замкненості в сенсі поточкової збіжності тут немає.

Оскільки скінченновимірні оператори є компактними, попередня теорема зокрема каже, що якщо послідовність скінченновимірних операторів T_n збігається за нормою до оператора T, то T компактний. Наступна теорема показує, що зворотне твердження також має місце, тобто наближуваність скінченновимірними – це характеристична властивість компактних операторів.

Теорема 2.7. *Нехай H_1, H_2 – гільбертові простори, $T \in K(H_1, H_2)$ – компактний оператор, $\varepsilon > 0$. Тоді існує скінченновимірний оператор $T_\varepsilon \in K(H_1, H_2)$ $\|T - T_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$.*

Доведення. Оскільки $T(B_{H_1})$ – передкомпакт, це сепарабельна множина, тобто $T(H_1)$ також сепарабельний. Замінивши, якщо потрібно, H_2 на замикання образу оператора T, можемо звести задачу до випадку, коли H_2 – сепарабельний простір. Якщо $\dim H_2 < \infty$, то сам оператор T буде скінченновимірним і питання вже розв'язане. Тобто залишається розглянути основний випадок, коли H_2 – нескінченновимірний сепарабельний простір. У цьому випадку в H_2 існує ортонормований базис $\{e_n\}_1^\infty$. Для передкомпакта $T(B_{H_1})$ в H_2 застосуємо Теорему 3 з попереднього розділу і знайдемо такий номер $n = n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\hat{x}_k|^2 < \varepsilon^2$ для всіх $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \in T(B_{H_1})$. Тобто,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\widehat{Th}_k\right|^2 < \varepsilon^2$$

для всіх $h \in B_{H_1}$. Позначимо P_n ортопроектор простору H_2 на $\mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Покажемо, що у якості шуканого скінченновимірного оператора можна взяти $T_\varepsilon = P_n T$. По-перше, T_ε насправді скінченновимірний, бо його образ лежить в $\mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^n$. Далі, для довільного $h \in B_{H_1}$ застосуємо формулу розкладу за ортонормованим базисом і формулу для ортопроектора:

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{Th}_k e_k, \quad T_\varepsilon h = P_n(Th) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{Th}_k e_k.$$

Відповідно, маємо оцінку

$$\|(T - T_\varepsilon)h\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{Th}_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\widehat{Th}_k\right|^2 < \varepsilon^2.$$

Тобто $\|T - T_\varepsilon\| = \sup\limits_{h \in B_{H_1}} \|(T - T_\varepsilon)h\| \leqslant \varepsilon$. □

Вправи

Ця частина не входить до програми екзамену, але виконавши наведені вправи читач зрозуміє багато речей, що є корисними в застосуваннях.

Нагадаємо, що завдяки теоремі 5.1 про загальний вигляд лінійного функціоналу в гільбертовому просторі (див. додаток), H_1^* ототожнюється з H_1, а H_2^* ототожнюється з H_2, тому в теорії гільбертових просторів спряжений оператор визначають як оператор T^*, що діє з H_2 в H_1 і задовольняє рівність $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для всіх $x \in H_1$, $y \in H_2$.

Нехай H_1, H_2 – сепарабельні гільбертові простори. Назвемо *гільберт - шмідтовою нормою* оператора $T \in L(H_1, H_2)$ величину

$$\|T\|_{\text{H-S}} = \left(\sum_{n,m\in\mathbb{N}} |\langle Te_n, g_m\rangle|^2\right)^{1/2},$$

де $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$ – фіксована пара ортонормованих базисів гільбертових просторів H_1 і H_2 відповідно. Оператор назвемо гільберт-шмідтовим, якщо $\|T\|_{\text{H-S}} < \infty$. Доведіть, що:

1. $\|T\| \leqslant \|T\|_{\text{H-S}}$.

2. $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^*g_n\|^2\right)^{1/2} = \|T\|_{\text{H-S}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}$.

3. Гільберт-шмідтевість оператора і значення $\|T\|_{\text{H-S}}$ не залежать від вибору пари ортонормованих базисів $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$, і $\|T\|_{\text{H-S}} = \|T^*\|_{H-S}$..

4. Застосуйте попередню вправу для доведення такого факту: нехай U – фіксований еліпсоїд у скінченновимірному евклідовому просторі. Тоді всі прямокутні паралелепіпеди, описані навколо U, мають однакові діаметри. Зазначимо, що навіть в тривимірному випадку довести цей факт методами аналітичної геометрії зовсім непросто.

5. Кожен гільберт-шмідтовий оператор компактний.

Нехай $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$ – функція двох змінних. Означимо оператор T інтегрування з ядром K в $L_2[0,1]$ наступним чином[2] :

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(t,x)f(t)\,dt.$$

Такі оператори називаються *гільберт-шмідтовим* інтегральними операторами. Використовуючи розклад ядра K у подвійний ряд Фур'є, доведіть, що гільберт-шмідтовий інтегральний оператор буде гільберт-шмідтовим оператором в загальному розумінні, описаному у попередніх вправах.

[2] Дуже невдала, але на жаль, вже стандартна термінологія. Термін "ядро інтегрального оператора" немає жодного зв'язку з терміном "ядро оператора", тобто множиною точок, де оператор дорівнює нулю.

6. Нехай T – гільберт-шмідтовий інтегральний оператор , причому ядро має вигляд $K(t,\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(t)\, g_j(\tau)$. Доведіть, що такий оператор має скінченний ранг.

7. Доведіть, що гільберт-шмідтовий інтегральний оператор може бути наближений з будь-якою точністю скінченновимірними операторами інтегрування з ядром.

Розділ 3. Самоспряжений оператор і його квадратична форма

Матеріал цього розділу вже знайомий читачеві з лінійної алгебри. Єдина відмінність в тому, що в нас зараз розглядається нескінченновимірний випадок, який у лінійній алгебрі не чіпали. Взагалі, нескінченновимірний випадок значно відрізняється від скінченновимірного (згадаємо некомпактність одиничної кулі), але в цьому розділі ця різниця не буде помітною.

Домашнє завдання: перш ніж починати цю тему, повторіть все, що Вам розповідали в курсі лінійної алгебри про самоспряжені оператори і ермітові матриці. Головне – чому для самоспряженого оператора в скінченновимірному просторі завжди існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора, зокрема матриця оператора є діагоналізовною. Останні факти вже не мають місця в нескинченновимірному просторі, і у подальшому нашою головною метою буде зрозуміти за яких додаткових умов можна отримати нескінченновимірні узагальнення.

Означення 3.1. Нехай H – гільбертів простір. Оператор $T \in L(H)$ називається *самоспряженим*, якщо $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Наступна теорема подає нетривіальні приклади самоспряжених операторів.

Теорема 3.2. *Для проектора $P \in L(H)$ такі умови еквівалентні:*

(1) P – самоспряжений оператор;

(2) P – ортопроектор.

Доведення. Оскільки P – проектор, то простір H розкладається у пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$, де H_1 – ядро проектора, а H_2 – образ. Доведемо спочатку імплікацію (1)⇒(2), тобто, якщо P – самоспряжений оператор, то $H_1 \perp H_2$. Справді, нехай $h_1 \in H_1$ і $h_2 \in H_2$. Тоді

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle = \langle Ph_1, h_2\rangle = 0.$$

Доведемо тепер обернену імплікацію (2)⇒(1), тобто, якщо $H_1 \perp H_2$, то P – самоспряжений оператор. Для цього візьмемо елементи $x, y \in H$ і запишемо їхній розклад $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, де $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Маємо

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_2, y \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = \langle x, Py \rangle . \qquad \square$$

Означення 3.3. Нехай T – самоспряжений оператор. *Білінійною формою оператора* T називається функція $F(x, y) = \langle Tx, y \rangle$; функція $g(x) = \langle Tx, x \rangle$ називається *квадратичною формою оператора* T.

Зазначимо, що

$$g(x) = \langle Tx, x \rangle \ = \ \langle x, Tx \rangle \ = \ \overline{\langle Tx, x \rangle} \ = \overline{g(x)},$$

тому квадратична форма самоспряженого оператора набуває тільки дійсні значення. Неважко перевірити, що

$$\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle\big) = \frac{1}{4}\big(g(x+y) - g(x-y)\big) .$$

Аналогічно можна знайти й уявну частину форми $\langle Tx, y \rangle$, тобто білінійна форма однозначно визначається за квадратичною. У свою чергу, білінійна форма однозначно визначає сам оператор (це нескладна, але корисна вправа: у разі, якщо для операторів T_1 T_2 квадратичні форми дорівнюють одна одній, то самі оператори також співпадають: $T_1 = T_2$). Отже, всю інформацію про самоспряжений оператор можна одержати, знаючи властивості його квадратичної форми. Як приклад наведемо корисну формулу для норми самоспряженого оператора.

Теорема 3.4. *Нехай T – самоспряжений оператор. Тоді*

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x \rangle| . \tag{3.1}$$

Доведення. Введемо позначення $q = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x \rangle|$. Для будь-якого $z \in S_H$ справджується оцінка $|\langle Tz, z \rangle| \leqslant q \|z\|^2$. За однорідністю, ця оцінка зберігається і для будь-якого $z \in H$. Потрібно довести, що $\|T\| = q$. Маємо:

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} \|Tx\| \leqslant \sup_{x,y \in S_H} \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle =$$

$$= \sup_{x,y \in S_H} \frac{1}{4} \left(\langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y \in S_H} \frac{q}{4} \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \right) = \sup_{x,y \in S_H} \frac{2q}{4} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) = q,$$

тобто $\|T\| \leqslant q$. Обернене співвідношення відразу випливає з нерівності Коші–Буняковського:

$$q = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \sup_{x \in S_H} \|Tx\| = \|T\|\,. \qquad \square$$

В доведенні Теореми 3.4 ми без пояснення використали нерівність

$$\|Tx\| \leqslant \sup_{y \in S_H} \operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle\,.$$

Ця нерівність випливає з того, що $\|Tx\|$ – це значення функції $\langle Tx, y\rangle$ у точці $y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_H$, а супремумом можна оцінити зверху всі значення функції.

Вправи

1. При яких λ оператор λI буде самоспряженим?

2. Обчислити норму оператора T, що задається матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в двомірному координатному просторі (простір розглядається у стандартній евклідовій нормі). Чи буде для цього оператора виконуватись формула (3.1) з Теореми 2?

3. Де в доведенні формули (3.1) була використана самоспряженість оператора, без якої формула не справджується?

4. Чи може для ненульового оператора функція $g(x) = \langle Tx, x\rangle$ бути тотожним нулем? Чи зміниться відповідь, якщо розглядати гільбертові простори над полем дійсних чисел?

5. Перевірте, що самоспряжені оператори утворюють лінійний підпростір НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ в $L(H)$, тобто операції множення на дійсне число та суми не виводять з класу самоспряжених операторів. Чи замкнений цей підпростір? Чи зберігає самоспряженість множення на комплексне число?

6. Перевірте, що добуток самоспряжених операторів є самоспряженим оператором тоді і тільки тоді, коли оператори комутують.

7. Як повинні бути пов'язані між собою підпростори $H_1, H_2 \subset H$, щоб ортопроектори P_1, P_2 на ці підпростори комутували?

Розділ 4. Власні числа і власні вектори компактних самоспряжених операторів

Означення 4.1. Число λ називається *власним числом* оператора $T \in L(H)$, якщо існує такий ненульовий елемент $x \in H$, який називається *власним вектором, що відповідає числу* λ, що $Tx = \lambda x$.

З курсу лінійної алгебри Ви знаєте, що у скінченновимірному комплексному просторі кожен лінійний оператор має власні числа і вектори. У нескінченновимірному випадку це вже не так.

Приклад 4.2. *Розглянемо оператор $T \in L(L_2[0,1])$, який діє за правилом $(Tx)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$. Припустимо, що існує власне число λ із власним вектором x. Тоді $\int_0^t x(\tau)d\tau = \lambda x(t)$ майже скрізь. У випадку $\lambda \neq 0$ з цього випливає неперервність функції x, потім з неперервності функції під інтегралом – диференційовність функції x в усіх точках, і, отже, $x(t) = \lambda x'(t)$, $x(0) = 0$. У такої задачі Коші є єдиний розв'язок $x \equiv 0$, тобто в оператора T немає ненульових власних чисел. У випадку $\lambda = 0$ умова перепишеться у вигляді $\int_0^t x(\tau)d\tau = 0$ майже скрізь. З теореми про похідну інтеграла як функції верхньої межі інтегрування отримуємо, що $x = 0$ майже скрізь, тобто x знову є нульовим елементом простору $L_2[0,1]$. Відмітимо, що T – компактний оператор, тобто у нескінченновимірному випадку навіть компактний оператор не завжди має власні числа.*

Приклад 4.3. *Розглянемо оператор $T \in L(L_2[0,1])$, який діє за правилом $(Tx)(t) = tx(t)$. Припустимо, що існує власне число λ із власним вектором x. Тоді $tx(t) = \lambda x(t)$ майже скрізь. Таке може статися лише якщо x є нульовим елементом простору $L_2[0,1]$. У цьому випадку T – самоспряжений оператор, тобто у нескінченновимірному випадку самоспряженість також не гарантує існування власних чисел.*

У цьому розділі ми, зокрема, доведемо, що якщо оператор водночас самоспряжений і компактній, то власні числа існують. Більше того, власних векторів настільки багато, що можна побудувати ортонормований базис усього простору лише з власних векторів оператора T. Такий базис значно спрощує роботу з оператором, зокрема, полегшує розв'язання рівнянь типу $Tx = b$.

У курсі лінійної алгебри оператори часто визначаються своїми матрицями. Поняття матриці оператора має сенс і для операторів у нескінченновимірному просторі (зрозуміло, із заміною скінчених матриць на нескінченні). Нехай X, Y – гільбертові простори, оператор $T \in L(X, Y)$, $\{e_n\}$ і $\{g_m\}$ – ортонормовані базиси в X і Y відповідно. Оператор задано, якщо відомі образи Te_n всіх елементів базису, оскільки лінійна оболонка базису – щільна підмножина в X, а оператор T неперервний. Кожен елемент простору Y зображується у вигляді ряду $y = \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, g_m \rangle g_m$, зокрема, $Te_n = \sum_{m=1}^{\infty} \langle Te_n, g_m \rangle g_m$. Отже, числа $t_{m,n} = \langle Te_n, g_m \rangle$ цілком визначають оператор T.

Означення 4.4. Набір чисел $t_{m,n} = \langle Te_n, g_m \rangle$, $n, m \in \mathbb{N}$ називається *матрицею оператора* T в базисах $\{e_n\}$, $\{g_m\}$. У цих позначеннях $Te_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{m,n} g_m$, тобто, так само, як і в курсі лінійної алгебри n-ний стовпчик матриці оператора складається з коефіцієнтів розкладу елемента Te_n за базисом $\{g_m\}$.

У випадку одного простору H, тобто $X = Y = H$, зазвичай беруть один базис $\{e_n\}$ замість двох, і визначають матрицю оператора $T \in L(H)$ формулою $t_{m,n} = \langle Te_n, e_m \rangle$

Вправа. Нехай в якомусь ортонормованому базисі $\{e_n\}$ простору H матриця оператора $T \in L(H)$ має діагональний вигляд. Тоді e_n є власними векторами, а діагональні елементи матриці – власними числами оператора T. Сформулюйте і доведіть зворотне твердження.

Багато з фактів, що ми зараз будемо наводити, добре відомі читачеві з курсу лінійної алгебри, до того ж з тим самим доведенням. Відмінності виникнуть на етапі питання про існування власних чисел.

Теорема 4.5. *Нехай T – самоспряжений оператор в гільбертовому просторі H. Тоді всі власні числа оператора T – це дійсні числа.*

Доведення. Розглянемо власне число λ із власним вектором x. Маємо $\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$. З цього випливає, що $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Означення 4.6. Нехай λ – власне число оператора $T \in L(H)$. *Власним підпростором*, відповідним власному числу λ, називається множина $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda I)$. Іншими словами, власний підпростір, відповідний власному числу λ, складається векторів, що задовольняють рівняння $Tx = \lambda x$, тобто з власних векторів, що відповідають власному числу λ, і нульового вектора.

Означення 4.7. Підпростір $Y \subset H$ називається *інваріантним підпростором* оператора $T \in L(H)$, якщо $T(Y) \subset Y$.

Власний підпростір – це очевидний приклад інваріантного підпростору. Навпаки, знання інваріантних підпросторів може допомогти при пошуку власних векторів і власних чисел. Наприклад, якщо в оператора $T \in L(X)$ є скінченновимірний інваріантний підпростір Y, то обмеження оператора T на цей підпростір – це вже оператор у скінченновимірному просторі, і в цьому підпросторі в оператора є власні вектори.

Теорема 4.8. *Якщо X – інваріантний підпростір самоспряженого оператора A, то ортогональне доповнення $X^{\perp}$ цього підпростору також буде інваріантним підпростором.*

Доведення. Потрібно довести, що для будь-якого елемента $y \in X^{\perp}$ його образ Ay також лежить в $X^{\perp}$. Для цього треба перевірити, що $\langle x, Ay\rangle = 0$ для будь-якого $x \in X$. Але $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$, а $\langle Ax, y\rangle = 0$, оскільки $Ax \in X$ (інваріантність підпростору X), а $y \in X^{\perp}$. □

Теорема 4.9. *Нехай $X_1 = Ker\,(A - \lambda_1 I)$, $X_2 = Ker\,(A - \lambda_2 I)$ – власні підпростори самоспряженого оператора A, відповідні двом різним власним числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді $X_1 \perp X_2$.*

Доведення. Для будь-яких $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ маємо

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle\,,$$

що можливо тільки при $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. □

Теорема 4.10. *Нехай λ – власне число оператора $T \in L(H)$. Тоді $|\lambda| \leqslant \|T\|$.*

Доведення. Розглянемо власний вектор $x \in H \setminus \{0\}$, відповідний числу λ. Тоді $|\lambda| = \frac{\|\lambda x\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|$. □

Теорема 4.11. *Нехай T – компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі H. Тоді існує власне число λ оператора T з $|\lambda| = \|T\|$. Тобто $\|T\|$ дорівнює максимальному можливому значенню модуля власних чисел.*

Доведення. У випадку $\|T\| = 0$ нема чого доводити: оператор дорівнює нулю в усіх точках, тобто усі ненульові елементи простору – це власні вектори з власним числом 0. Тому у подальшому $\|T\| \neq 0$. Нагадаємо, що

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x\rangle|\,,$$

Оберемо таку послідовність $x_n \in S_H$, що

$$\left|\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle\right| = \|T\|.$$

Оскільки всі значення $\langle Tx, x\rangle$ – це дійсні числа, маємо два можливі випадки: $\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \|T\|$, або ж $\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = -\|T\|$. Другий випадок можна звести до першого заміною оператора T на $-T$. Тому без обмеження загальності можемо вважати, що

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \|T\|.$$

За означенням компактного оператору, послідовність векторів Tx_n міститься у передкомпакті $T(S_H)$, тобто в послідовності x_n можна знайти таку підпослідовність y_n, що значення Ty_n мають границю. Позначимо $y = \lim_{n\to\infty} Ty_n$. Маємо

$$\|T\| \geqslant \|Ty_n\| \geqslant \langle Ty_n, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \|T\|,$$

тобто $\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|Ty_n\| = \|y\|$. Далі,

$$\left\|Ty_n - \|T\|y_n\right\|^2 = \|Ty_n\|^2 - 2\|T\| \langle Ty_n, y_n\rangle + \|T\|^2 \|y_n\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.1}$$

Оскільки

$$Ty_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y, \tag{4.2}$$

З (4.1) випливає, що

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{y}{\|T\|}.$$

Відповідно,

$$Ty_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{Ty}{\|T\|}.$$

Порівнявши з (4.2), отримуємо $Ty = \|T\|y$, тобто y – власний вектор, а $\|T\|$ – власне число. □

Теорема 4.12. *Нехай $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H. Тоді або T має скінченну кількість власних чисел, або ж власні числа утворюють послідовність, що прямує до нуля.*

Доведення. Припустимо, що твердження невірне. Тоді існує $\varepsilon > 0$ та деяка послідовність попарно різних власних чисел $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, з $|\lambda_n| > \varepsilon$. Оберемо для кожного λ_n відповідний власний вектор $x_n \in S_H$. Тоді, з одного боку, в послідовності Tx_n міститься якась збіжна підпослідовність, а з іншого боку попарні відстані між векторами Tx_n відокремлені від нуля: $\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} > \sqrt{2}\varepsilon$. Протиріччя. □

Теорема 4.13. *Нехай $T \in L(H)$ – компактний оператор в гільбертовому просторі H. Тоді власні підпростори, відповідні ненульовим власним числам, скінченновимірні.*

Доведення. Нехай Y – власний підпростір, відповідний числу λ. З огляду на те, що обмеження оператора T на підпростір Y дорівнює оператору λI_Y, отримуємо компактність одиничного оператору I_Y на просторі Y. Приклад 2.5 каже, що одиничний оператор в нескінченновимірному просторі не компактний, тобто Y має бути скінченновимірним. $\square$

Теорема 4.14. *Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор. Виберемо в кожному з власних підпросторів оператора T по ортонормованому базису і випишемо всі ці базиси в єдину послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортономований базис простору H. Тобто існує ортономований базис, який складається з власних векторів оператора T.*

Доведення. Всі e_n – це власні вектори оператора T, причому з огляду на теорему 4.9 вони утворюють ортонормовану систему. Нам залишилось довести повноту цієї системи. Позначимо $\overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ через X. Підпростір X інваріантний для оператора T і містить всі його власні вектори. Отже, підпростір $X^{\perp}$ також буде інваріантним. Якби $X^{\perp}$ був ненульовим інваріантним підпростором, застосовуючи теорему 4.11 до обмеження оператора T на $X^{\perp}$ ми б отримали існування якогось власного вектора в $X^{\perp}$, але ж всі власні вектори містяться в X! Це означає, що підпростір $X^{\perp}$ складається лише з нуля, тобто $X = H$. $\square$

Нарешті, зберемо для зручності щойно доведені основні властивості в одну теорему, яку зазвичай називають спектральною теоремою для компактного самоспряженого оператора.

Теорема 4.15. *Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $T \in L(H)$ – компактний самоспряжений оператор. Тоді*

1. *Всі власні числа оператора T – це дійсні числа, що містяться на відрізку $[-\|T\|, \|T\|]$.*

2. *Принаймні одно з чисел $-\|T\|, \|T\|$ є власним числом оператора T.*

3. *Власних чисел або скінчена кількість, або ж вони утворюють послідовність, що прямує до нуля.*

4. *Існує ортономований базис, який складається з власних векторів оператора T.*

Вправи

1. Нехай оператор $T \in L(H)$ заданий своєю матрицею в ортонормованому базисі. За якої умови на елементи матриці T буде самоспряженим?

2. За якої умови на ядро K гільберт–шмідтовий інтегральний оператор буде самосопряженим?

Зафіксуємо функцію $g \in L_1[0,1]$ і означимо на $L_2[0,1]$ оператор A_g, який діє за правилом $(A_g f)(t) = g(t) f(t)$.

3. Доведіть, що якщо образ оператора A_g знову лежить в $L_2[0,1]$, то $A_g \in L(L_2[0,1])$. (Порада: найбільш економний спосіб доведення неперервності в подібних випадках – це використання теореми про замкнений графік).

4. В умовах попередньої вправи обчислити норму оператора A_g. Використовуючи цей результат, дати опис тих g, для яких $A_g \in L(L_2[0,1])$.

5. За якої умови оператор A_g буде самоспряженим?

6. Охарактеризувати ті g, для яких оператор A_g матиме власні числа і вектори.

7. Нехай g не є тотожною сталою. Чи може оператор A_g мати повну систему власних векторів? Те саме питання для неперервної функції g.

Розділ 5. Додаток. Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі

Ця теорема у параграфі 12.2.3 підручнику частково спирається на матеріал з лінійної алгебри (розділ 5) про ядра функціоналів і гіперплощини, який ми не вивчали. Тому для зручності наведемо модифіковане доведення.

Теорема 5.1. *Для будь-якого лінійного неперервного функціонала F, заданого на гільбертовому просторі H, існує такий елемент $h \in H$, що*

$$F(x) = \langle x, h \rangle \tag{5.1}$$

для будь-якого $x \in H$. Такий елемент h визначений однозначно, і $\|F\| = \|h\|$.

Доведення. У випадку функціонала F, що тотожно дорівнює нулю, твердження очевидне. Нехай $F \neq 0$. Позначимо ядро функціонала F через X. Тоді існує елемент e одиничної норми, ортогональний до X. За шуканий елемент візьмемо $h = \overline{F(e)}e$. Розглянемо довільний $x \in H$ і доведемо виконання (5.1). Позначимо

$$y = x - \frac{F(x)}{F(e)}\, e.$$

Тоді $F(y) = 0$, тобто $y \in X$ і тому $\langle y, h \rangle = 0$ Запишемо x у вигляді

$$x = \frac{F(x)}{F(e)}\, e + \left(x - \frac{F(x)}{F(e)}\, e \right) = \frac{F(x)}{F(e)}\, e + y.$$

Тоді

$$\langle x, h \rangle = \left\langle \frac{F(x)}{F(e)}\, e, h \right\rangle = \frac{F(x)}{F(e)} \left\langle e, \overline{F(e)}e \right\rangle = \frac{F(x)}{F(e)} F(e) \langle e, e \rangle = F(x),$$

що доводить рівність (5.1). Рівність $\|F\| = \|h\|$ було доведено раніше [Kad, §12.1.3] як наслідок нерівності Коші-Буняковського. Залишилось перевірити єдиність елемента h. Нехай $h_1 \in H$ – такий елемент, що $F(x) = \langle x, h_1 \rangle$ для будь-якого $x \in H$. Тоді $\langle x, h - h_1 \rangle = 0$ для будь-якого $x \in H$, зокрема $\langle h - h_1, h - h_1 \rangle = 0$. Тобто $h - h_1 = 0$ і $h = h_1$. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 1. Завдяки цій теоремі, спряжений простір H^* ототожнюється з самим простором H: кожному елементу $h \in H$ відповідає функціонал $\langle \cdot, h \rangle$, такий що діє на $x \in H$ за формулою $\langle x, h \rangle$. Зауважимо, що при такому ототожненні є тонкощі: хоча це ототожнення – це бієктивна ізомерія, і сумі елементів відповідає сума функціоналів, але при множенні елемента h на скаляр λ відповідний функціонал домножується не на λ, а на $\overline{\lambda}$: $\langle \cdot, \lambda h \rangle = \overline{\lambda} \langle \cdot, h \rangle$. Ототожнення H^* з H зазвичай записують як $H^* = H$. Треба пам'ятати у якому сенсі використовують це рівняння.

Зауваження 2. Міркування, використане в кінці доведення, можна подати окремим твердженням: якщо $\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle$ для всіх $x \in H$, то $h_1 = h_2$. Це корисне зауваження має сенс запам'ятати.

Бібліографія

[Kad] Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. (Серія "Університетська бібліотека").

[K-A] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М. : Наука, 1984. – 752 с.

[K-F] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

[Rud] Рудин У. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1975.

[Wer] Werner D. Funktionalanalysis. 2. Auflage. – Berlin: Springer-Verlag, 1997.